Logika intuicjonistyczna

Piotr Iwaniuk

9 listopada 2011

Plan

Plan

Intuicjonizm

- Pogląd w filozofii matematyki wprowadzony w 1912 L. E. J. Brouwera.
- „Twierdzenia matematyczne powstają dzięki intuicjom naszego umysłu.”
- Skupienie się na konstruktywnych dowodach twierdzeń.

Logika intuicjonistyczna

- System logiczny oparty na wspomnianym wcześniej koncepcie.
- W odróżnieniu od klasycznej logiki zamiast bezwzględnej prawdziwości zdań istotna jest możliwość ich konstruktywnego udowodnienia.
- Nie obowiązuje prawo wyłączonego środka.

Istnieją takie liczby niewymierne a i b, że a^b jest wymierna.

Niech $y = \sqrt{2}$, $x = \sqrt{2}$.

Przypadek I: x^y jest wymierna

Wtedy stwierdzenie jest prawdziwe, bo można wziąć $a = x$, $b = y$.

Przypadek II: x^y jest niewymierna

Wtedy można wziąć $a = x^y$, $b = x$. Zachodzi:

$$a^b = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$$

Niech $y = \sqrt{2}$, $x = \sqrt{2}$.

Przypadek I: x^y jest wymierna

Wtedy stwierdzenie jest prawdziwe, bo można wziąć $a = x$, $b = y$.

Przypadek II: x^y jest niewymierna

Wtedy można wziąć $a = x^y$, $b = x$. Zachodzi:

$$a^b = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$$

Podany dowód zawiera rozbicie na przypadki.

Jako konstruktywny dowód można wskazać $a = \sqrt{2}$ i $b = 2log_2 3$.

$$a^b = (\sqrt{2})^{2log_2 3} = 2^{log_2 3} = 3$$

Interpretacja BHK

- Formuły logiki intuicjonistycznej możemy interpretować jako konstrukcje.
- Pochodzi od nazwisk: Brouwer–Heyting–Kołmogorow.

Interpretacja BHK

- Podstawowe spójniki logiczne: koniunkcja, alternatywa, implikacja.
- Żaden z podstawowych spójników nie wyraża się przy pomocy pozostałych.
- Jedna stała $\bot$ oznaczająca fałsz.
- Negacja $\neg\phi$ jest skrótem od $\phi \to \bot$

Interpretacja BHK

Niech PV oznacza nieskończony zbiór zmiennych zdaniowych.

Definicja

Zbiór Φ formuł to najmniejszy zbiór taki, że:

- $\perp \in \Phi$,
- $p \in \Phi$ dla $p \in PV$,
- $\phi \to \psi$, $\phi \vee \psi$, $\phi \wedge \psi$ dla $\phi, \psi \in \Phi$.

Interpretacja BHK

Konstrukcje

- Konstrukcja $\phi_1 \wedge \phi_2$ składa się z konstrukcji ϕ_1 oraz konstrukcji ϕ_2.
- Konstrukcja $\phi_1 \vee \phi_2$ składa się ze wskaźnika $i \in \{1, 2\}$ oraz konstrukcji ϕ_i.
- Konstrukcja $\phi_1 \rightarrow \phi_2$ to metoda na przekształcenie konstrukcji ϕ_1 w konstrukcję ϕ_2.
- Konstrukcja $\perp$ nie istnieje.

Konstrukcja negacji

Konstrukcja $\neg\phi$ to metoda na przekształcenie konstrukcji ϕ w nieistniejący obiekt.

Przykład(y)

- $p \to q \to p$
- $(p \to q \to r) \to (p \to q) \to p \to r$
- $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$

Plan

1. Wprowadzenie
2. Semantyka
3. Zastosowania
4. Systemy wspomagania dowodzenia

Dedukcja naturalna

- System dowodzenia dla intuicjonistycznej logiki zdaniowej
- Operujemy na osądach $\Gamma \vdash \phi$, gdzie Γ to skończony zbiór formuł, a ϕ to formuła.
- Dowód $\Gamma \vdash \phi$ w dedukcji naturalnej to drzewo, w którym korzeń to $\Gamma \vdash \phi$, liście to aksjomaty, a krawędzie odpowiadają regułom dedukcji.

Dedukcja naturalna

$$(\to\text{-intro})\ \frac{\Delta, \varphi \vdash \psi}{\Delta \vdash \varphi \to \psi} \qquad (\to\text{-elim})\ \frac{\Delta \vdash \varphi \to \psi \qquad \Delta \vdash \varphi}{\Delta \vdash \psi}$$

$$(\wedge\text{-intro})\ \frac{\Delta \vdash \varphi \qquad \Delta \vdash \psi}{\Delta \vdash \varphi \wedge \psi} \qquad (\wedge\text{-elim})\ \frac{\Delta \vdash \varphi \wedge \psi}{\Delta \vdash \varphi} \qquad (\wedge\text{-elim})\ \frac{\Delta \vdash \varphi \wedge \psi}{\Delta \vdash \psi}$$

$$(\vee\text{-intro})\ \frac{\Delta \vdash \varphi}{\Delta \vdash \varphi \vee \psi} \qquad (\vee\text{-intro})\ \frac{\Delta \vdash \psi}{\Delta \vdash \varphi \vee \psi}$$

$$(\vee\text{-elim})\ \frac{\Delta \vdash \varphi \vee \psi \qquad \Delta, \varphi \vdash \vartheta \qquad \Delta, \psi \vdash \vartheta}{\Delta \vdash \vartheta}$$

Interpretacja topologiczna

- Interpretacja topologiczna polega na przypisaniu formułom wartości w postaci zbiorów otwartych.
- Przez $int(A)$ oznaczam wnętrze zbioru A.
- Wartościowanie zmiennych zdaniowych to funkcja $\sigma : PV \longrightarrow O$, gdzie O jest rodziną wszystkich podzbiorów otwartych w $\mathbb{R}$.
- Interpretacja topologiczna wynika z semantyki Heytinga.

Interpretacja topologiczna

Wartości formuł

- $[\![\bot]\!] = \emptyset$
- $[\![\top]\!] = \mathbb{R}$
- $[\![p]\!] = \sigma(p)$
- $[\![\neg\phi]\!] = int(\mathbb{R} - [\![\phi]\!])$
- $[\![\phi \vee \psi]\!] = [\![\phi]\!] \cup [\![\psi]\!]$
- $[\![\phi \wedge \psi]\!] = [\![\phi]\!] \cap [\![\psi]\!]$
- $[\![\phi \to \psi]\!] = int((\mathbb{R} - [\![\phi]\!]) \cup [\![\psi]\!])$

Modele Kripkego

Do pokazania semantyki Kripkego dla logiki intuicjonistycznej potrzebna jest definicja modelu Kripkego.

Definicja

Model Kripkego to trójka $M = \langle W, \leq, \Vdash \rangle$, gdzie W jest niepustym zbiorem, $\leq$ jest częściowym porządkiem na W, a $\Vdash$ jest relacją między elementami W a elementami PV spełniającą warunek:

$$\text{Jeśli } w \leq w' \text{ i } w \Vdash p, \text{ to } w' \Vdash p.$$

Sematyka Kripkego

Znaczenie formuł dla modelu Kripkego

- $c \Vdash \phi \vee \psi$ wtw $c \Vdash \phi$ lub $c \Vdash \psi$,
- $c \Vdash \phi \wedge \psi$ wtw $c \Vdash \phi$ i $c \Vdash \psi$,
- $c \Vdash \phi \rightarrow \psi$ wtw $c' \Vdash \psi$ dla każdego $c' \geq c$ takiego, że $c' \Vdash \phi$,
- $c \Vdash \perp$ nigdy nie zachodzi.

Znaczenie negacji

$c \Vdash \neg\phi$ wtw dla żadnego $c' \geq c$ nie zachodzi $c' \Vdash \phi$.

Plan

Izomorfizm Curry'ego-Howarda

Odpowiedniość między termami rachunku lambda a dowodami w logice intuicjonistycznej.

Answer set programming

- Rodzaj programowania w logice.
- Opisano zastosowanie logiki intuicjonistycznej i innych logik wielowartościowych [1].

Plan

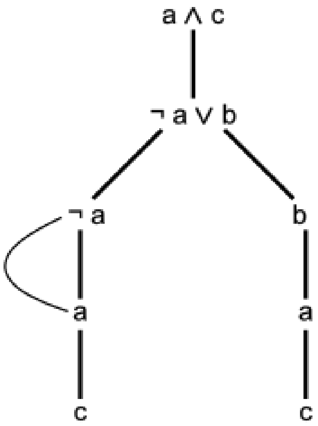
MINLOG

- System wspomagania dowodzenia dla logiki minimalnej.
- Możliwość użycia dodatkowych aksjomatów dla logiki intuicjonistycznej i klasycznej.
- Automatyczne dowodzenie.

ileanTAP

- Program do automatycznego dowodzenia twierdzeń napisany w Prologu.
- Korzysta z free-variable semantic tableaux [2].
- 5 kB, 111 linijek.

Semantic tableaux



Literatura

M Osorio, J A Navarro, and J Arrazola.
Applications of intuitionistic logic in answer set programming.
Technical Report cs.LO/0305046, May 2003.

Jens Otten.
ileantap: An intuitionistic theorem prover.
In *International Conference TABLEAUX'97, LNAI 1227*, pages 307–312, 1997.

M. H. Sørensen and P. Urzyczyn.
Lectures on the Curry-Howard isomorphism.
Elsevier, 2006.