Rozstrzygalność logiki modalnej

Logika modalna, a logika pierwszego rzędu

Magda Zakrzewska

13.05.2009 / Referat

Spis treści

Spis treści

Składnia

- niepusty, skończony zbiór Φ *stałych zdaniowych*, oznaczane jako: $p,\ p',\ q,\ q',\ \dots$
- tworzymy formuły modalne:
  - wszystkie stałe zdaniowe
  - jeśli φ i ψ to modalne formuły zdaniowe, to są nimi też też $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$ oraz $\Box\varphi$ (konieczność zajścia)
  - zapisujemy $\varphi \vee \psi$ zamiast $\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ oraz $\varphi \rightarrow \psi$ zamiast $\neg\varphi \vee \psi$

Składnia

- przyjmujemy *true* jako tautologię, np. $p \vee \neg p$ oraz *false* jako $\neg$*true*
- używamy $\Diamond\phi$ żeby skrócić $\neg\Box\neg\phi$ (ϕ jest możliwe, jeśli $\neg\phi$ nie jest konieczne)
- Przykład:
  formuła $\Box\Diamond\Box p$ mówi, że jest konieczna możliwość, że p konieczne

Semantyka

- model logiki: *struktura Kripkego* M
- M to krotka $(\mathcal{S}, \pi, \mathcal{R})$, gdzie:
  - S to zbiór *stanów*
  - $\pi : \Phi \rightarrow 2^S$ to *interpretacja*, która każdej stałej zdaniowej z Φ przypisuje zbiór stanów z S
  - $\mathcal{R}$ to binarna relacja na S, tj. zbiór par elementów z S
- $\pi(p)$ to zbiór stanów, w których zachodzi p
- relacja $\mathcal{R}$: $(s, t) \in \mathcal{R}$ jeśli stan t jest możliwy ze stanu s

Przykład

- $\Phi = \{p,\ q\}$, więc język ma dwie stałe zdaniowe p i q
- $M = (S,\ \pi,\ \mathcal{R})$, gdzie $S =\{\ u,\ w\}$
- p jest prawdziwe w u i w, q jest prawdziwe w u
- v i w są możliwe w stanach u i v

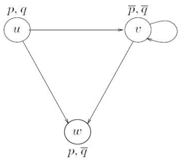

Figure 1: The Kripke structure M

- $(M,\ v)| = \neg q$, $(M,\ w) \models \neg q$
- $(M,\ v) \models \Box\neg q$, $(M,\ w) \models \Box\neg q$, $(M,\ u) \models \Box\Box\neg q$

Spis treści

Twierdzenie

Czy formuła zdaniowa jest prawdziwa w strukturze M?
Dla skończonych struktur możemy to sprawdzić...

Dla danej formuły ϕ definiujemy $|\phi|$, *długość* ϕ, jako liczbę (wszystkich) symboli ϕ. Dla $M = (S, \pi, \mathcal{R})$ definiujemy $||M||$, *wielkość* M, jako sumę liczby stanów w S i liczby par w $\mathcal{R}$.

Twierdzenie

Istnieje algorytm,który dla danej struktury Kripkego M , stanu s oraz formuły modalnej ϕ sprawdza, czy $(M, s) \models \phi$ w czasie $O(||M|| \times |\phi|)$.

Dowód

Dowód

- Niech $\phi_1, \ldots, \phi_m$ będą podformułami ϕ, uszeregowanymi według długości rosnąco, (dowolne podformuły). Mamy, że $\phi_m = \phi$ oraz jeśli ϕ_i jest podformułą ϕ_j, to $i < j$. Jest co najwyżej $|\phi|$ podformuł ϕ, więc $m \leq |\phi|$.
- Indukcja po k. Możemy nadać etykiety każdemu stanowi s w M : ϕ_j albo $\neg\phi_j$, dla $j = 1, \ldots, k$, w zależności czy ϕ_j jest prawdziwe w s w czasie $O(k||_1 M||)$.
- Trudny jest tylko przypadek, gdy ϕ_{k+1} jest postaci $\Box\phi_j$, gdzie $j < k + 1$. Etykietujemy stan s zdaniem $\Box\phi_j$ wtw gdy każdy stan t taki, że $(s, t) \in \mathcal{R}$ ma etykietę ϕ_j. Zakładając indukcyjnie, że każdy stan ma etykietę ϕ_j albo $\neg\phi_j$, możemy ten krok wykonać w czasie $O(||M||)$ (bo do każdej krawędzi zajrzymy raz).

Spis treści

Spis treści

Definicje

- Mówimy, że formuła ϕ jest *spełnialna* w strukturze Kripkego M, jeśli $(M, u) \models \phi$ dla jakiegoś stanu u z M.
- Mówimy, że formuła ϕ jest *spełnialna*, jeśli jest spełnialna w jakiejś strukturze Kripkego.
- Mówimy, że formuła ϕ jest *prawdziwa* w strukturze Kripkego M, ozn. $M \models \phi$, jeśli $(M, u) \models \phi$ dla wszystkich u w M.
- Mówimy, że formuła ϕ jest *prawdziwa*, jeśli jest prawdziwa we wszystkich strukturach Kripkego.
- Zauważmy, że ϕ jest prawdziwa wtw gdy $\neg\phi$ jest niespełnialna.

Jak sprawdzać?

Chcemy spawdzać spełnialność i prawdziwość formuł. Ale jak sprawdzić wszystkie struktury Kripkego?
Logika modalna ma własność *ograniczonego modelu*.

Twierdzenie

Jeśli formuła modalna ϕ *jest spełnialna, to* ϕ *jest spełnialna w strukturze Kripkego o co najwyżej* $2^{|\phi|}$ *stanach*.

Wniosek..

- Z twierdzenia wynika , jak można sprawdzić, czy dana formuła ϕ jest prawdziwa (tzn.czy $\neg\phi$ nie jest spełnialna).
- Konstruujemy wszystkie struktury Kripkego o co najwyżej 2 stanach (jest ich skończenie wiele, ale i tak baaardzo dużo). Sprawdzamy, czy ϕ jest prawdziwa w każdym stanie każdej struktury.
- Robimy to za pomocą znanego nam algorytmu. Jeśli ϕ jest prawdziwa w każdym stanie każdej struktury, to jest prawdziwa.

Złożoność

Ale jaka jest napawdę złożoność tego problemu?

Twierdzenie
Problem prawdziwości dla logiki modalnej jest PSPACE-zupełny.

(to lepsze ograniczenie niż powyżej!)

Spis treści

Intuicja

Możemy patrzeć na logikę modalną jako na fragment logiki pierwszego rzędu.

- Φ - zbiór stałych zdaniowych
  słownik Φ^* - zawiera predykaty unarne q odpowiadające stałym q z Φ oraz predykat binarny R
- mapujemy strukturę Kripkego $M = (S, \pi, \mathcal{R})$ na relacyjną strukturę M^* nad słownikiem Φ^*
- dziedziną M^* jest S
- dla każdej stałej $q \in \Phi$, jej interpretacja w M^* to zbiór $\pi(q)$
- interpetacja binarnego predykatu R w M^* to relacja binarna $\mathcal{R}$

Formalnie

Czyli na strukturę Kripkego można patrzeć jak na relacyjną strukturą nad słownikiem z jednym predykatem binarnym i wieloma unarmymi.

Trzeba teraz formalnie zdefiniować translację logiki modalnej do logiki pierwszego rzędu.

Każdej formule modalnej ϕ przyporządkowujemy formułę logiki pierwszego rzędu ϕ^* z jedną zmienną wolną x (obejmująca stany z S).

Formalnie

- $q^* = q(x)$ dla stałej q
- $(\neg\phi)^* = \neg(\phi^*)$
- $(\phi \wedge \psi)^* = (\phi^* \wedge \psi^*)$
- $(\Box\phi)^* = (\forall y(R(x,\ y) \rightarrow \phi^*(x/y)))$
  gdzie y jest zmienną nie występującą w ϕ^* oraz $\phi^*(x/y)$ powstaje poprzez zastąpienie wszystkich wystąpień x w ϕ^* przez y
- transformacja $\Diamond q$ wynika z powyższych reguł

Przykład

ML:
$(\Box\Diamond q)^*$

FO:
$\forall y(R(x,\ y) \rightarrow \exists z(R(y,\ z)\ \wedge q(z)))$

Widać, że dostajemy dużo kwantyfikatorów. A ten fragment FO miał to być rozstrzygalny..

Translacja jesk OK

Twierdzenie

- $(M, s) \models \phi$ *wtw* $(M^*, V) \models \phi^*(x)_r$ *dla każdego wartościowania* V *takiego, że* $V(x) = s$
- ϕ *jest prawdziwą formułą modalną wtw* ϕ^* *jest prawdziwą formułą FO*

Czyli ϕ^* jest prawdziwe dla elementów dziedziny odpowiadającym stanom s, które $(M, s) \models \phi$ oraz ϕ jest prawdziwe wtw ϕ^* jest prawdą.

Spis treści

Paradoks

- model checking dla logiki modalnej ma czas liniowy na rozmiar strukury
- dla logiki pierwszego rzędu dla struktury relacyjnej jest to problem PSPACE-zupełny

- problem prawdziwości dla ML jest PSPACE-zupełny
- dla FO jest nierozstrzygalny
- rozstrzygalność można uzyskać ograniczając liczbę kwantyfikatorów
- ale w ML tego nie przecież nie ma...

Dwie zmiene

Ale logika modalna okazuje się być fragmantem FO z dwoma zmiennymi.

FO^2 zawiera tylko formuły z co najwyżej dwoma zmiennymi

$\forall x \forall y (R(x, y) \rightarrow R(y, x))$ jest w FO^2
$\forall x \forall y \forall z (R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R(x, z))$ nie jest FO^2

Każdy spójnik modalny wprowadza nową zmienną np. $\Box\Box q^*$:
$\forall y (R(x, y) \rightarrow \forall z (R(y, z) \rightarrow q(z)))$

Konwersja na FO2

Jak uniknąć wprowadzania nowych zmiennych? Zamienimy definicję ϕ^* na ϕ^+ :

- $q^+ = q(x)$ dla stałej q
- $(\neg\phi)^+ = \neg(\phi^+)$
- $(\phi \wedge \psi)^+ = (\phi^+ \wedge \psi^+)$
- $(\Box\phi)^+ = (\forall y(R(x, y) \rightarrow \forall x(x = y \rightarrow \phi^+)))$

Na przykład $(\Box\Box q)^+$ to:
$\forall y(R(x, y) \rightarrow \forall x(x = y \rightarrow \forall y(R(x, y) \rightarrow \forall x(x = y \rightarrow q(x)))$

Definicja jest OK

Twierdzenie

- $(M, s) \models \phi$ *wtw gdy* $(M^*, V) \models \phi^+(x)$ *dla każdego wartościowania* V *takiego, że* $V(x) = s$
- ϕ *jest prawdziwą formułą wtw gdy* ϕ^+ *jest prawdziwa dla* FO^2

Prawdziwość formuły

Równoważność z fragmentem FO^2 wyjaśnia własności ML:

Twierdzenie

Istnieje algorytm, który dla relacyjnej struktury M nad dziedziną D, FO^2-formuły $\phi(x,\ y)$ oraz wartościowania $V : \{x,\ y\} \to D$ sprawdza, czy $(M,\ V) \models \phi$ w czasie $O(||M||^2 \times |\phi|)$.

Twierdzenie

Jeśli FO^2-formuła ϕ jest spełnialna, to ϕ jest spełnialna w relacyjnej strukturze o co najwyżej $2^{|\phi|}$ elementach. Ponadto problem prawdziwości formuły jest co-NEXPTIME-zupełny.

Zauważmy, że dla logiki modalnej czasy są lepsze.

Spis treści

Konwersja na FO2

Ograniczymy trochę zbiór struktur Kripkego, ale polepszymy czas.

Weźmy pod uwagę system aksjomatów $\mathcal{T}$, który składa się z następujących aksjomatów i reguł:

- A1. Wszystkie tautologie rachunku zdań
- A2. $(\Box\phi \wedge \Box(\phi \to \psi)) \to \Box\psi$ (Aksjomat Dystrybuowania)
- R1. Z ϕ i $\phi \to \psi$ wynika ψ (Modus ponens)
- R2. Z ϕ wynika $\diamond\phi$ (Uogólnienie)
- R3. $\Box p \to p$ (veracity - prawdziwość)

Klasy struktur

Niech M będzie klasą struktur Kripkego. Mówimy, że formuła modalna ϕ jest *prawdziwa* w M, jeśli jest prawdziwa we wszystkich strukturach w M.

System aksomatów X nazywamy *pewnym* dla M, jeśli każda formuła, którą można dowieść jest prawdziwa w M.

System aksomatów X nazywamy *zupełnym* dla M, jeśli każdą formułę, która jest prawdziwa w M, można dowieść.

Klasy struktur

- Strukturę Kripkego $M = (S, \pi, \mathcal{R})$ nazywamy zwrotną, jeśli $\mathcal{R}$ jest zwrotna.
  Niech M_r będzie klasą wszystkich takich struktur.
- *$\mathcal{T}$ jest pewny i zupełna dla M_r*.
- *Problem prawdziwości dla logiki modalnej w M_r jest PSPACE-zupełny*.

FO2

Nasz system aksjomatów na szczęscie można powiązać z FO^2.

Twierdzenie

Formuła modalna ϕ jest prawdziwa w M_r wtw gdy prawdziwa jest FO^2 -formuła: $\forall x(R(x,\ x)) \rightarrow \phi^+$.

Jeszcze inna aksjomatyka

Dorzućmy dwie nowe reguły. Otrzymamy system aksjomatów *S5*.

- Wiem, co wiem: $\Box p \rightarrow \Box\Box p$
- Wiem, czego nie wiem: $\neg\Box p \rightarrow \Box\neg\Box p$

Rozpatrzmy klasę struktur M_{rst} takich, że relacja $\mathcal{R}$ jest relacją równoważności.

Dobra złożoność

- *S5 jest pewny i zupełny dla M_{rst}.*
- *Problem prawdziwości formuły dla logiki modalnej w M_{rst} jest NP-zupełny.*

Niestety nie można wyrazić własności M_{rst} za pomocą FO^2...

- symetrię można:
  $\forall x \forall y (R(x, y) \to R(y, x))$
- przechodniości już nie można:
  $\forall x \forall y \forall z (R(x, y) \wedge R(y, z) \to R(x, z))$

Podsumowanie FO2

- FO^2 jest rozstrzygalna
- można szybko zamienić formułę ML na formułę FO^2
- ale rozszerzenie FO^2 o największy i najmniejszy punkt stały lub kwantyfikację po ścieżkach - już nierozstrzygalne
- chociaż CTL i rachunek μ już tak... potrzebna nam jeszcze inna logika

Spis treści

CTL - składnia

- p, dla każdego $p \in \Phi$
- $\neg\psi$ oraz $\psi \wedge \psi'$
  gdzie ψ i ψ' to formuły CTL
- $EX\psi,\ AX\psi,\ E(\psi U \psi'),\ A(\psi U \psi')$
  gdzie ψ i ψ' to formuły CTL

CTL - semantyka

- $(M, s) \models EX\psi$ if $(M, t) \models \psi$ dla jakiegoś t t.że $(s, t) \in \mathcal{R}$.
- (M, s) $\models AX\psi$ jeśli $(M, t) \models \psi$ dla każdego t t.że $(s, t) \in \mathcal{R}$
- (M, s) $\models E(\psi U \psi')$ jeśli istnieje ścieżka $s_0, s_1, \ldots$, dla $s_0 = s$, oraz $i \geq 0$, takie,że$(M, s_i) \models \psi'$,i dla wszystkich j,gdzie$0 \leq j < i$ mamy$(M, s_j) \models \psi$
- $(M, s) \models A(\psi U \psi')$ jeśli dla wszystkich ścieżek $s_0, s_1, \ldots$, gdzie $s_0 = s$, istnieje $i \geq 0$ takie, że $(M, s_i) \models \psi'$,oraz dla wszystkich j takich, że $0 \leq j < i$, mamy$(M, s_j) \models \psi$

Spełnialność CTL

Twierdzenie

Jeśli formuła CTL ϕ jest spełnialna, to ϕ jest spełnialna w strukturze Kripkego o co najwyżej $2^{|\phi|}$ stanach.

Twierdzenie

Problem prawdziwości dla CTL jest EXPTIME-zupełny.

Rachunek μ

- p dla każdego $p \in \Phi$,
- X, dla każdego $X \in \Psi$ (zmienne zdaniowe)
- $\neg\psi$ oraz $\psi \wedge \psi'$, gdzie ψ i ψ' to formuły
- $\Box\psi$, gdzie ψ to formuła
- $\mu X.\psi$
  gdzie ψ to formuła, w której X występuje pozytywnie (np. parzysta liczba negacji)

Wystąpień zmiennej zdaniowej X w zasięgu μX nazywamy *związanym*.
Formuła, której wszystkie wystąpienia zmiennych zdaniowych są związane nazywamy *zamkniętą*.
Ozn.: $\phi(X_1, \ldots, X_k)$ - formuła ze zmiennymi $X_1, \ldots, X_k$.

Rachunek μ - semantyka

- model logiki: $(M,\ s,\ V)$
  - $M = (S,\ \pi,\ \mathcal{R})$ - struktura Kripkego
  - s to *stan*
  - $V : \Psi \rightarrow 2^S$ to *interpretacja zmiennych*, która każdej zmiennej z Ψ przyporządkowuje zbiór stanów z S (analogicznie do π)
- $V[X \mapsto S']$ to interpretacja zmiennych, która zgadza się z V wszędzie oprócz X i $V(X) = S'$

Rachunek μ - prawdziwość formuł

- $(M, s, V) \models p$ (dla $p \in \Phi$) jeśli $s \in \pi(p)$
- $(M, s, V) \models X$ (dla $X \in \Psi$) jeśli $s \in V(X)$
- $(M, s, V) \models \psi \wedge \psi'$ wtw $(M, s, V) \models \psi$ i $(M, s, V) \models \psi'$
- $(M, s, V) \models \neg\psi$ jeśli $(M, s, V) \not\models \psi$
- $(M, s, V) \models \Box\psi$ jeśli $(M, t, V) \models \psi$ dla każdego t t.że $(s, t) \in \mathcal{R}$
- $(M, s, V) \models \mu X.\psi$ jeśli $s \in \cap\{T \subseteq S | T = \{t | (M, t, V[X \mapsto T]) \models \psi\}\}$

Rachunek μ - prawdziwość formuł

- prawdziwość formuły zależy od interpretacji zmiennych wolnych
- dlatego dla formuł zamkniętych można mówić o prawdziwości formuły w modelu i stanie: $(M, s) \models \psi$
- problem prawdziwości jest EXPTIME-zupełny (jak dla CTL)

Rachunek μ a CTL

CTL można zapisać za pomocą rachunku μ

Przykłady:

- $AX\,p = \Box p$
- $EX\,p = \Diamond p$
- $A(pUq) = \mu X.q \vee (p \wedge \Box X)$
- $E(pUq) = \mu X.q \vee (p \wedge \Diamond X)$

Rachunek μ na FP2

- $q^+ = q(x)$ dla stałej q
- $(\neg\phi)^+ = \neg(\phi^+)$
- $(\phi \wedge \psi)^+ = (\phi^+ \wedge \psi^+)$
- $(\Box\phi)^+ = (\forall y(R(x,\ y) \to \forall x(x = y \to \phi^+)))$
- $(\mu P.\phi)^+ = \mu P.\varphi^+$

Przykłady :
$\mu Q.(p(x) \vee \exists y(R(x,\ y) \wedge Q(y)))$ = $\mu Q.(p \vee \Diamond Q)$
wszystkie wierzchołki, z których osiągalne jest p

$E(pUq)$ = $\mu Q.\ q(x) \vee (p(x) \wedge \exists y(R(x,\ y) \wedge \exists x(x = y \wedge Q(x)))$

Prawdziwość formuły

Twierdzenie

Problem, czy dana FP^2-formuła $\phi(x, y)$ jest prawdziwa w danej strukturze relacyjnej M w dziedzi-
nie D przy wartościowaniu $V : \{x, y\} \rightarrow D$ jest w $NP \bigcap co - NP$.

Twierdzenie

Problem spełnialności formuły z FP^2 jest nierozstrzygalny.

Spis treści

Podsumowanie FO2

- dlaczego po rozszerzeniu logika modalna jest rozstrzygalna, a FO^2 nie?
- rozszerzenie FO^2 najmniejszy punkt stały - już nierozstrzygalne
- ponieważ logiki modalne mają własność drzewiastą, a FO^2 nie

Własność

- Dla logik modalnych każda spełnialna formuła ma model, który jest drzewem.
- Bierzemy strukture Kripkego K, która spełnia ψ w stanie v. Budujemy drzewo K' rozwijając K z v. Tzn. bierzemy wszystkie skończone ścieżki, które się zaczynają w v. Koniec ścieżki to osobny węzeł.
- dostajemy nawet ograniczoną arność drzewa
- K i K' są w relacji bisymulacji w stanie v, więc formuła jest spełnialna w stanie v.

Bisymulacja

(uwaga na boku:)

Twierdzenie

Dane są struktury Kripkego: $M_1(S_1, \pi_1, \mathcal{R}_1)$ i $M_2(S_2, \pi_2, \mathcal{R}_2)$, $u \in S_1$ oraz $v \in S_2$.
Jeśli $u \sim v$ (są w relacji bisymulacji), to $(M_1, u) \models \phi$ wtw $(M_2, v) \models \phi$ dla formuły ϕ rachunku μ.

Własność - cd

- FO^2 nie ma tej własności: $\forall x \forall y R(x, y)$
- ... i tym bardziej FP^2
- intuicyjnie: dzięki własności rozwijania w drzewo możemy szukać efektywnych algorytmów decyzyjnych

Spis treści

Idea

- Potrzebna nam inna logika
- Kwantyfikatory zawsze mają obok siebie predykaty $R(x, y)$, bierzemy więc fragment FO zwany guarded fragment

Definicja GF

- Każda formuła atomowa $R(x_{i_1}, \cdots, x_{i_m})$ oraz $x_i = x_j$ należą do GF
- GF jest zamknięta na operacje boolowskie
- jeśli $x,\ y$ to krotki zmiennych, $\alpha(x,\ y)$ jest pozytywną formułą **atomową** oraz $\psi(x,\ y)$ to formuła GF taka, że wszystkie zmienne wolne ψ występują w α, wtedy do GF należą też:
  $\exists y(\alpha(x,\ y) \wedge \psi(x,\ y))$
  $\forall y(\alpha(x,\ y) \rightarrow \psi(x,\ y))$

Atom $\alpha(x,\ y)$ nazywany jest *dozorem* kwantyfikacji.

Własności GF

- Można zamapować logikę modalną do guarded fragment.
- Ale rozszerza ML. Nie musimy się już ograniczać tylko do relacji binarnych i unarnych
- jeśli dodamy do GF formułę opisującą przechodniość, to otrzymamy logikę nierozstrzygalną: $\forall xyz(R(x,y) \wedge R(y,z) \rightarrow R(x,z))$

Modal logic na GF

- $q^+ = q(x)$ dla stałej q
- $(\neg\phi)^+ = \neg(\phi^+)$
- $(\phi \wedge \psi)^+ = (\phi^+ \wedge \psi^+)$
- $(\Box\phi)^+ = (\forall y(R(x,\ y) \to \forall x(x = y \to \phi^+)))$
- transformacja $\Diamond q$ wynika z powyższych reguł

Nie w GF

Nie da się wyrazić w GF:

Przechodniość:

- $\forall xyz(Exy \wedge Eyz \rightarrow Exz)$
- $\forall xy(Exy \rightarrow \forall z(Eyz \rightarrow Exz))$

Nie można powiedzieć, że wszystkie stany między x i z mają własność φ:

- $\forall y(x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow \varphi(y))$

Spełnialność w GF

- Problem spełnialności GF jest 2EXPTIME-zupełny (podwójnie wykładniczy)
- To gorzej niż dla FO_2! (tam było NEXPTIME, dla ML to PSPACE)
- Tak jest, ponieważ mamy nieograniczoną arność predyktów, bo:
  - dla n-arnego predykatu i dwóch obiektów w dziedzinie mamy możliwości 2^{2^n}
- Ale w większości konkretnych zastosowań arność jest ograniczona - dostajemy EXPTIME-zupełny

Spis treści

μGF

Guarded fixed point logic

- mieliśmy zobaczyć, co się stanie po dodaniu punktów stałych
- dostaniemy logikę, do której można zamapować rachunek μ

μGF

Guarded fixed point logic

- W - k-arna relacja zmiennych
- $x = x_1, \dots x_k$ - k-krotka zmiennych
- $\psi(W, x)$ - formuła w GF, w której W występuje tylko pozytywnie i nie w dozorach i nie zawiera żadnych wolnych zmiennych oprócz x

Możemy zbudować formuły:
$[LFP\ Wx.\ \psi]\ (x)$
$[GFP\ Wx.\ \psi]\ (x)$

μGF

Dla każdej struktury $\mathfrak{A}$, formuła [LFP $Wx.\ \psi\ (\ W,\ x)$] (a) jest prawdziwa wtw gdy a mależy do najmniejszrgo punktu stałego operatora:

- $\psi^{\mathfrak{A}}\ :\ W \rightarrow \psi^{\mathfrak{A}}(W)\ := \{a \in A^k.\ \mathfrak{A} \models \psi(W,\ a)\}$

Analogicznie dla GFP.

Przykład μGF

$$\exists xy Fxy \wedge \forall xy(Fxy \to \exists x Fyx) \wedge \forall xy(Fxy \to [\mathrm{LFP}\, Wx.\forall y(Fyx \to Wy)](x))$$

Co to jest?

Przykład μGF

$$\exists xyFxy \wedge \forall xy(Fxy \rightarrow \exists xFyx) \wedge \forall xy(Fxy \rightarrow [\mathrm{LFP}\, Wx.\forall y(Fyx \rightarrow Wy)](x))$$

- istnieje F-krawędź i każda z F-krawędzi może być rozszerzona do nieskończonej ścieżki
- każdy wierzchołek x F-krawędzi i jest najmniejszym punktem stałym operatora $W - \rightarrow \{w :$ każdy F-poprzednik w jest w $W\}$
- lfp to wierzchołki, które mają skończenie wiele F-poprzedników
- to oznacza, że F się nie cykli
- ta formuła ma tylko nieskończone modele

Przykład μGF

- ta formuła ma tylko nieskończone modele
- czy to znaczy, że μGF jest nierozstrzygalna?

Twierdzenie

Problem spełnialności guarded fixed point logic jest rozstrzygalny i 2EXPTIME-zupełny.
Dla $\mu\mathrm{GF}$-*formuł*, których symbole relacyjne mają ograniczoną arność problem spełnialności jest EXPTIME-zupełny.

(...tak jak rachunku μ)

Inna własność drzewiasta

Dlaczego dostajemy taką dobrą złożoność?
Formuła w GFP ma własność **drzewa małej szerokości**.

Struktura ma k ***szerokość-drzewową***, jeśli:
może być pokryta przez podstruktury wielkości co najwyżej $k+1$,
które razem tworzą drzewopodobną formę (zazębiając się nawzajem).

k szerokość-drzewowa

Struktura $\mathfrak{A}$ ma k szerokość-drzewową, jeśli:

- jeśli istnieje drzewo T
- oraz dla każdego wierzchołka v drzewa T podstruktura $\mathfrak{F}(v) \subseteq \mathfrak{A}$ o co najwyżej $k+1$ elementach taka, że:
    - $\mathfrak{A} = \bigcup_{v \in T} \mathfrak{F}(v)$
    - dla każdego elementu a struktury $\mathfrak{A}$, zbiór wierzchołków v takich, że $a \in \mathfrak{F}(v)$ jest połączony (czyli to poddrzewo T)

k szerokość-drzewowa cd.

dlaczego k+1 struktury?

- drzewa mają szerokość 1
- cykle mają szerokość 2 *(triangulacja okręgu)*

- w ML nie można wyrazić własności: coś zachodzi dla wszystkich stanów. Nie ma nieskończonego kwantyfikowania
- nie ma rekursji
- ale jest to logika *mocno* rozstrzygalna
- nawet po rozszerzeniu do CTL i rachunku μ

Tablica: Złożoności

język	**model checking**	**spełnialność**
ML	$O(\|\|M\|\| \times \|\phi\|)$	PSPACE-zupełny
FO	PSPACE-zupełny	nierozstrzygalny
FO^2	$O(\|\|M\|\|^2 \times \|\phi\|)$	NEXPTIME
M_{rst}	$O(\|\|M\|\| \times \|\phi\|)$	NP-zupełny
CTL	———	EXPTIME
μ	———-	EXPTIME
FP^2	$NP \bigcap co - NP$	nierozstrzygalny
GF	——	(2)EXPTIME
μGF	——	(2)EXPTIME