Bisymulacja

Niezawodność systemów współbieżnych i obiektowych

Grzegorz Maj

18.03.2009

Plan prezentacji

- Przypomnienie:

Plan prezentacji

- Przypomnienie:
  - Gra bisymulacyjna

Plan prezentacji

- Przypomnienie:
  - Gra bisymulacyjna
  - Definicje bisymulacji i równoważności

Plan prezentacji

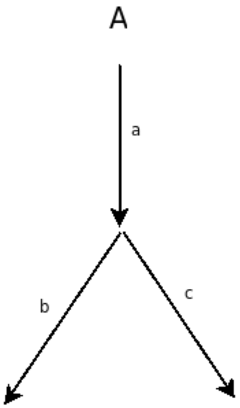
- Przypomnienie:
  - Gra bisymulacyjna
  - Definicje bisymulacji i równoważności
- Inne wersje gry

Plan prezentacji

- Przypomnienie:
  - Gra bisymulacyjna
  - Definicje bisymulacji i równoważności
- Inne wersje gry
- Indukcja i koindukcja

Bisymulacja

Przypomnienie



Gra bisymulacyjna

Dwóch graczy: Spoiler i Duplikator

Dwóch graczy: Spoiler i Duplikator

Pozycje: pary stanów $(P, Q) \in S$

Dwóch graczy: Spoiler i Duplikator

Pozycje: pary stanów $(P, Q) \in S$

Przebieg gry:
W pozycji (P, Q) Spoiler wykonujer ruch P $\xrightarrow{\alpha}$ P' (lub Q $\xrightarrow{\alpha}$ Q'). Duplikator odpowiada, wykonując ruch Q $\xrightarrow{\alpha}$ Q' (odpowiednio: P $\xrightarrow{\alpha}$ P'). Następnie rozgrywkę kontynuuje się od (P', Q').

Dwóch graczy: Spoiler i Duplikator

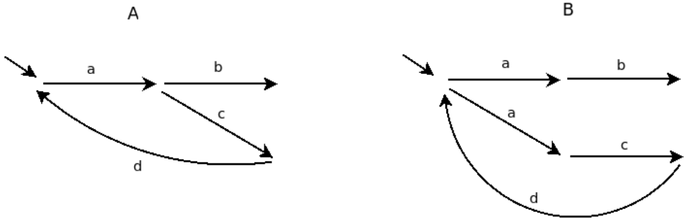
Pozycje: pary stanów $(P, Q) \in S$

Przebieg gry:
W pozycji (P, Q) Spoiler wykonujer ruch P $\stackrel{\alpha}{\rightarrow}$ P' (lub Q $\stackrel{\alpha}{\rightarrow}$ Q'). Duplikator odpowiada, wykonując ruch Q $\stackrel{\alpha}{\rightarrow}$ Q' (odpowiednio: P $\stackrel{\alpha}{\rightarrow}$ P'). Następnie rozgrywkę kontynuuje się od (P', Q').

Rozstrzygnięcie:
Gracz, który nie może wykonać ruchu, przegrywa. W przypadku rozgrywki nieskończonej zawsze wygrywa Duplikator.

Gra bisymulacyjna

Przykład



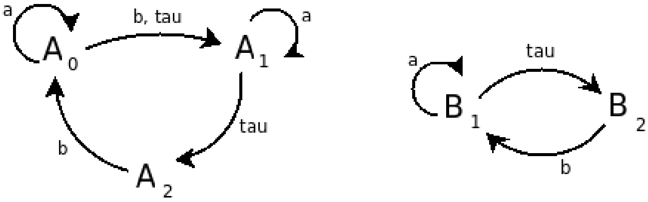
Gra bisymulacyjna

Twierdzenie

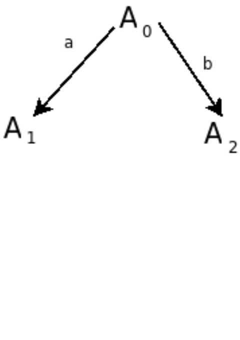
Systemy P i Q są bisymulacyjnie równoważne (ozn. $P \sim Q$) wtedy i tylko wtedy, gdy Duplikator ma strategię wygrywającą w grze rozpoczynającej się od (P, Q).

Wprowadzamy specjalną akcję τ, oznaczającą "sprawy własne".

Odpowiedzią Duplikatora na ruch α jest ciąg $\stackrel{\tau *}{\longrightarrow} \stackrel{\widehat{\alpha}}{\longrightarrow} \stackrel{\tau *}{\longrightarrow}$, gdzie $\widehat{a} = a, \widehat{\tau} = \epsilon$.



Gra bisymulacyjna
(Słaba) bisymulacja



Silna bisymulacja i silna równoważność

Silna bisymulacja

Definicja

Niech S będzie zbiorem stanów ($P, Q, .. \in S$), na którym dana jest rodzina relacji binarnych $\{\xrightarrow{a} \subseteq S \times S\}_{a \in A}$.

Silną bisymulacją nazwiemy relację binarną R na S taką, że jeśli $(P, Q) \in R$,
(i) $P \xrightarrow{a} P' \Rightarrow \exists_{Q'} Q \xrightarrow{a} Q'$ i $(P', Q') \in R$,
(ii) $Q \xrightarrow{a} Q' \Rightarrow \exists_{P'} P \xrightarrow{a} P'$ i $(P', Q') \in R$.

Silna bisymulacja

Definicja

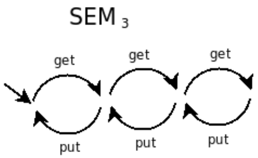
Niech S będzie zbiorem stanów ($P, Q, .. \in S$), na którym dana jest rodzina relacji binarnych $\{\xrightarrow{a} \subseteq S \times S\}_{a \in A}$.

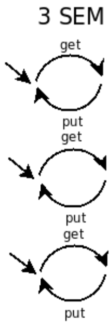
Silną bisymulacją nazwiemy relację binarną R na S taką, że jeśli $(P, Q) \in R$,
(i) $P \xrightarrow{a} P' \Rightarrow \exists_{Q'} Q \xrightarrow{a} Q'$ i $(P', Q') \in R$,
(ii) $Q \xrightarrow{a} Q' \Rightarrow \exists_{P'} P \xrightarrow{a} P'$ i $(P', Q') \in R$.

Uwaga: $\varnothing$ jest świetnym przykładem silnej bisymulacji!

Silna bisymulacja

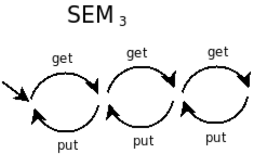
Przykład

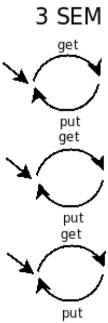




Silna bisymulacja

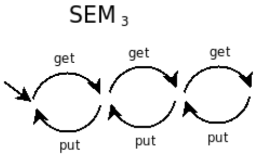
Przykład

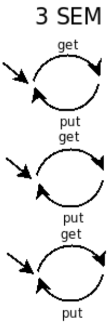




Znajdź silną bisymulację, która zawiera parę $(SEM_3, SEM|SEM|SEM)$.

Silna bisymulacja
Przykład





Znajdź silną bisymulację, która zawiera parę $(SEM_3, SEM|SEM|SEM)$.

$\{(SEM_3, SEM|SEM|SEM), (SEM_3', SEM'|SEM|SEM), (SEM_3', SEM|SEM'|SEM), (SEM_3', SEM|SEM|SEM')$

$(SEM_3'', SEM'|SEM'|SEM), (SEM_3'', SEM'|SEM|SEM'), (SEM_3'', SEM|SEM'|SEM'), (SEM_3''', SEM'|SEM'|SEM')\}$

Twierdzenie

Niech $P_i, i = 1, 2, ..$ - silne bisymulacje. Wówczas:

1. Id_S
2. P_i^{-1}
3. $P_1 \circ P_2$
4. $\bigcup_{i \in I} P_i$

są silnymi bisymulacjami.

Silna równoważność

Definicja

P i Q są *silnie równoważne* (ozn. $P \sim Q$), gdy $(P, Q) \in R$ dla pewnej silnej bisymulacji R.

Silna równoważność

Definicja

P i Q są *silnie równoważne* (ozn. $P \sim Q$), gdy $(P, Q) \in R$ dla pewnej silnej bisymulacji R.

Inaczej:
$\sim \; = \bigcup\{R : R \text{ jest silną bisymulacją}\}$.

Silna równoważność

Uwga

1. $\sim$ jest największą silną bisymulacją
2. $\sim$ jest relacją równoważności

Bisymulacja i równoważność obserwacyjna

Po co nam coś słabszego?

Dotychczas w naszym modelu była tylko komunikacja pomiędzy agentami.
Przypomnienie: specjalna akcja τ oznacza “sprawy własne”.

Po co nam coś słabszego?

Dotychczas w naszym modelu była tylko komunikacja pomiędzy agentami.
Przypomnienie: specjalna akcja τ oznacza “sprawy własne”.

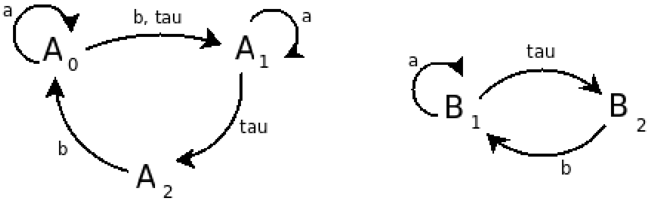
Definicja

Niech S będzie zbiorem stanów ($P, Q, .. \in S$), na którym dana jest rodzina relacji binarnych $\{\stackrel{\alpha}{\rightarrow} \subseteq S \times S\}_{\alpha \in A}$.

(Słabą) bisymulacją nazwiemy relację binarną R na S taką, że jeśli $(P, Q) \in R$,
(i) $P \stackrel{\alpha}{\rightarrow} P' \Rightarrow \exists_{Q'} Q \stackrel{\tau*}{\rightarrow} \stackrel{\widehat{\alpha}}{\rightarrow} \stackrel{\tau*}{\rightarrow} Q'$ i $(P', Q') \in R$,
(ii) $Q \stackrel{\alpha}{\rightarrow} Q' \Rightarrow \exists_{P'} P \stackrel{\tau*}{\rightarrow} \stackrel{\widehat{\alpha}}{\rightarrow} \stackrel{\tau*}{\rightarrow} P'$ i $(P', Q') \in R$,
gdzie $\widehat{a} = a, \widehat{\tau} = \epsilon$.

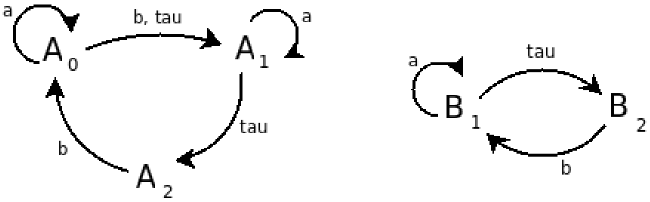
Bisymulacja

Przykład



Bisymulacja

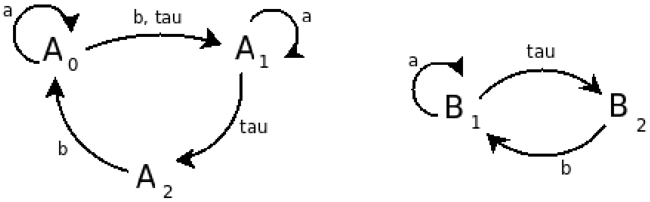
Przykład



Znajdź bisymulację, która zawiera parę (A_0, B_1).

Bisymulacja

Przykład



Znajdź bisymulację, która zawiera parę (A_0, B_1).
$\{(A_0, B_1), (A_1, B_1), (A_2, B_2)\}$

Obserwacyjna równoważność

Definicja

P i Q są *obserwacyjne równoważne* (ozn. $P \approx Q$), gdy $(P, Q) \in R$ dla pewnej bisymulacji R.

Obserwacyjna równoważność

Definicja

P i Q są *obserwacyjne równoważne* (ozn. $P \approx Q$), gdy $(P, Q) \in R$ dla pewnej bisymulacji R.

Inaczej:
$\approx = \bigcup\{R : R \text{ jest bisymulacją}\}$.

Obserwacyjna równoważność

Definicja

P i Q są *obserwacyjne równoważne* (ozn. $P \approx Q$), gdy $(P, Q) \in R$ dla pewnej bisymulacji R.

Inaczej:
$\approx \; = \bigcup\{R : R \text{ jest bisymulacją}\}$.

Obserwacyjna równoważność posiada własności analogiczne do silnej równoważności.

Inne wersje gry

Inne wersje gry

Wersja symetryczna

Usymetryczniamy zdefiniowaną wcześniej grę (dla słabej bisymulacji), tzn. ruchy Spoilera są postaci $\stackrel{\tau*}{\longrightarrow} \stackrel{\widehat{\alpha}}{\longrightarrow} \stackrel{\tau*}{\longrightarrow}$. Pozostałe zasady się nie zmieniają.

Usymetryczniamy zdefiniowaną wcześniej grę (dla słabej bisymulacji), tzn. ruchy Spoilera są postaci $\stackrel{\tau*}{\longrightarrow} \stackrel{\widehat{\alpha}}{\longrightarrow} \stackrel{\tau*}{\longrightarrow}$. Pozostałe zasady się nie zmieniają.

Jaki jest związek tej gry z grą bisymulacyjną? (Czy równoważność w tak zdefiniowanej grze i równoważność bisymulacyjna są tym samym?)

Inne wersje gry

Wersja symetryczna

Usymetryczniamy zdefiniowaną wcześniej grę (dla słabej bisymulacji), tzn. ruchy Spoilera są postaci $\stackrel{\tau *}{\longrightarrow} \stackrel{\widehat{\alpha}}{\longrightarrow} \stackrel{\tau *}{\longrightarrow}$. Pozostałe zasady się nie zmieniają.

Jaki jest związek tej gry z grą bisymulacyjną? (Czy równoważność w tak zdefiniowanej grze i równoważność bisymulacyjna są tym samym?)

Oczywiście Spoilerowi sprawy nie utrudniamy, bo może grać dokładnie tak, jak w grze bisymulacyjnej. Czyli: jeśli Duplikator ma strategię wygrywającą w grze symetrycznej, ma także strategię wygrywającą w grze bisymulacyjnej.

Inne wersje gry

Wersja symetryczna

Usymetryczniamy zdefiniowaną wcześniej grę (dla słabej bisymulacji), tzn. ruchy Spoilera są postaci $\xrightarrow{\tau *} \xrightarrow{\widehat{\alpha}} \xrightarrow{\tau *}$. Pozostałe zasady się nie zmieniają.

Jaki jest związek tej gry z grą bisymulacyjną? (Czy równoważność w tak zdefiniowanej grze i równoważność bisymulacyjna są tym samym?)

Oczywiście Spoilerowi sprawy nie utrudniamy, bo może grać dokładnie tak, jak w grze bisymulacyjnej. Czyli: jeśli Duplikator ma strategię wygrywającą w grze symetrycznej, ma także strategię wygrywającą w grze bisymulacyjnej.

Trochę wbrew intuicji, Duplikatorowi też życia nie utrudniamy. Wręcz przeciwnie, jeśli Duplikator potrafi odpowiadać na pojedyncze ruchy, potrafi też odpowiedzieć na kilka τ oraz α zagrane bez przerwy.

Grę bisymulacyjną (dla silnej lub słabej bisymulacji) modyfikujemy w następujący sposób: Spoiler wykonuje ruchy o dowolnej długości, np.: $\xrightarrow{\alpha}\xrightarrow{\beta}\xrightarrow{\gamma}$. Pozostałe zasady się nie zmieniają.

Inne wersje gry

Długie ruchy

Grę bisymulacyjną (dla silnej lub słabej bisymulacji) modyfikujemy w następujący sposób: Spoiler wykonuje ruchy o dowolnej długości, np.: $\xrightarrow{\alpha}\xrightarrow{\beta}\xrightarrow{\gamma}$. Pozostałe zasady się nie zmieniają.

Jaki jest związek tej gry z grą bisymulacyjną? (Czy równoważność w tak zdefiniowanej grze i równoważność bisymulacyjna są tym samym?)

Inne wersje gry

Długie ruchy

Grę bisymulacyjną (dla silnej lub słabej bisymulacji) modyfikujemy w następujący sposób: Spoiler wykonuje ruchy o dowolnej długości, np.: $\xrightarrow{\alpha}\xrightarrow{\beta}\xrightarrow{\gamma}$. Pozostałe zasady się nie zmieniają.

Jaki jest związek tej gry z grą bisymulacyjną? (Czy równoważność w tak zdefiniowanej grze i równoważność bisymulacyjna są tym samym?)

Odpowiedź jest analogiczna, jak dla gry symetrycznej.

Inne wersje gry

Symulacja

Do gry bisymulacyjnej dodajemy istotną regułę: Spoiler przed grą wybiera, na którym systemie będzie grał i przez całą rozgrywkę nie będzie tego zmieniał. Pozostałe zasady się nie zmieniają.

Inne wersje gry

Symulacja

Do gry bisymulacyjnej dodajemy istotną regułę: Spoiler przed grą wybiera, na którym systemie będzie grał i przez całą rozgrywkę nie będzie tego zmieniał. Pozostałe zasady się nie zmieniają.

Jaki jest związek tej gry z grą bisymulacyjną? (Czy równoważność symulacyjna i bisymulacyjna są tym samym?

Inne wersje gry

Symulacja

Do gry bisymulacyjnej dodajemy istotną regułę: Spoiler przed grą wybiera, na którym systemie będzie grał i przez całą rozgrywkę nie będzie tego zmieniał. Pozostałe zasady się nie zmieniają.

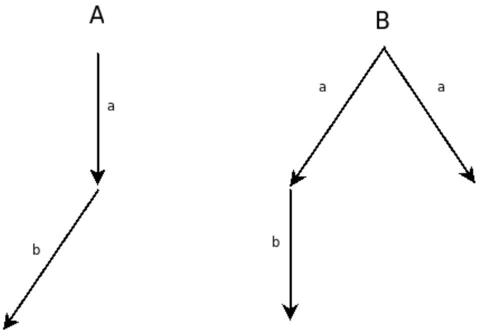
Jaki jest związek tej gry z grą bisymulacyjną? (Czy równoważność symulacyjna i bisymulacyjna są tym samym?

Oczywiście, jeśli Duplikator ma strategię wygrywającą w grze bisymulacyjnej, ma też strategię wygrywającą w grze symulacyjnej.

Czy w drugą stronę implikacja zachodzi?

Gra symulacyjna

Przykład



Powyższe systemy nie są bisymulacyjne równoważne, natomiast Duplikator ma strategię wygrywającą w grze symulacyjnej.

Inne wersje gry

Gra o zakontraktowanej długości

Tym razem do gry bisymulacyjnej dodajemy następujące reguły: na początku gry Spoiler wybiera długość gry (liczbę kroków). Gra odbywa się standardowo, jednak w przypadku osiągnięcia zadeklarowanej przez Spoilera liczby kroków, Duplikator wygrywa (tak, jakby gra była już nieskończona). Pozostałe zasady się nie zmieniają.

Tym razem do gry bisymulacyjnej dodajemy następujące reguły: na początku gry Spoiler wybiera długość gry (liczbę kroków). Gra odbywa się standardowo, jednak w przypadku osiągnięcia zadeklarowanej przez Spoilera liczby kroków, Duplikator wygrywa (tak, jakby gra była już nieskończona). Pozostałe zasady się nie zmieniają.

Jaki jest związek takiej gry z grą bisymulacyjną? (Czy równoważność w takiej grze i równoważność bisymulacyjna są tym samym?)

Inne wersje gry

Gra o zakontraktowanej długości

Tym razem do gry bisymulacyjnej dodajemy następujące reguły: na początku gry Spoiler wybiera długość gry (liczbę kroków). Gra odbywa się standardowo, jednak w przypadku osiągnięcia zadeklarowanej przez Spoilera liczby kroków, Duplikator wygrywa (tak, jakby gra była już nieskończona). Pozostałe zasady się nie zmieniają.

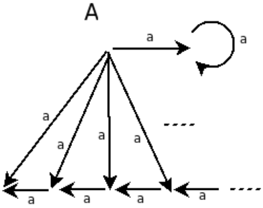
Jaki jest związek takiej gry z grą bisymulacyjną? (Czy równoważność w takiej grze i równoważność bisymulacyjna są tym samym?

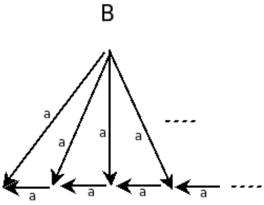
Oczywiście, jeśli Duplikator ma strategię wygrywającą w grze bisymulacyjnej, ma też strategię wygrywającą w tej wersji gry.

Czy w drugą stronę implikacja zachodzi?

Gra o zakontraktowanej długości

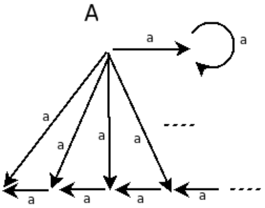
Przykład





Gra o zakontraktowanej długości

Przykład



Powyższe systemy nie są bisymulacyjne równoważne, natomiast Duplikator ma strategię wygrywającą w grze o dowolnej, z góry ustalonej długości.

Indukcja i koindukcja

Algebra dla zbioru skończonych słów nad alfabetem A (A^*):
$\langle A^*, \alpha : (\{*\} + (A \times A^*)) \to A^* \rangle$, gdzie
$\alpha(*) = \epsilon, \alpha(\langle a, w \rangle) = a \cdot w$.

Algebra dla zbioru skończonych słów nad alfabetem A (A^*):
$\langle A^*, \alpha : (\{*\} + (A \times A^*)) \to A^* \rangle$, gdzie
$\alpha(*) = \epsilon, \alpha(\langle a, w \rangle) = a \cdot w$.

Koalgebra dla zbioru słów skończonych i nieskończonych:
$\langle A^\omega, \gamma : A^\omega \to (\{*\} + (A \times A^\omega)) \rangle$, gdzie
$\gamma(\epsilon) = *, \gamma(a \cdot w) = \langle a, w \rangle$.

algebra	koalgebra = system
relacja substytutywna	bisymulacja
kongruencja	bisymulacja + równoważność
indukcja	koindukcja

Definicja

Niech $F : S \to S$ - funktor. $F-$ *koalgebra* lub $F-$ *system* to para (S, α_S), gdzie S - zbiór stanów, oraz $\alpha_S : S \to F(S)$. S nazywamy nośnikiem systemu, α_S to $F-$ *struktura tranzycyjna* lub po prostu *struktura tranzycyjna* systemu S.

Jak zwykle S będzie zbiorem stanów ($P, Q, .. \in S$), na którym dana jest rodzina relacji binarnych $\{\xrightarrow{a} \subseteq S \times S\}_{a \in A}$.

Definiujemy funktor $B(X) = \wp(A \times X) = \{V \mid V \subseteq A \times X\}$.

Jak zwykle S będzie zbiorem stanów ($P, Q, .. \in S$), na którym dana jest rodzina relacji binarnych $\{\xrightarrow{a} \subseteq S \times S\}_{a \in A}$.

Definiujemy funktor $B(X) = \wp(A \times X) = \{V \mid V \subseteq A \times X\}$.

System tranzycyjny może być reprezentowany jako $B - system$ (S, α_S) poprzez:
$\alpha_S : S \to B(S), s \mapsto \{\langle a, s' \rangle \mid s \xrightarrow{a} s'\}$.

Koindukcja

Zasada dowodu koindukcyjnego

R - bisymulacja, S - system.
$\forall_{s,s' \in S}((s, s') \in R \Rightarrow s = s')$

Niech $F(S) = A \times S$ - funktor systemu tranzycyjnego z wyjściem, $(A^{\infty}, \langle h, t \rangle)$ - system.

Definicje koindukcyjne

Przykład 1 - “Zipujemy” strumienie

Niech $F(S) = A \times S$ - funktor systemu tranzycyjnego z wyjściem, $(A^\infty, \langle h, t \rangle)$ - system.

Niech $zip : A^\infty \times A^\infty \to A^\infty$ spełnia: $\langle h, t \rangle (zip\langle a \cdot v', w \rangle) = (a, zip\langle w, v' \rangle)$.

Niech $F(S) = A \times S$ - funktor systemu tranzycyjnego z wyjściem, $(A^\infty, \langle h, t\rangle)$ - system.

Niech $zip : A^\infty \times A^\infty \to A^\infty$ spełnia:
$\langle h, t\rangle(zip\langle a \cdot v', w\rangle) = (a, zip\langle w, v'\rangle)$.

Czy prawdą jest, że $zip\langle a^\infty, b^\infty\rangle = (ab)^\infty$?

Definicje koindukcyjne

Przykład 1 - “Zipujemy” strumienie

Niech $F(S) = A \times S$ - funktor systemu tranzycyjnego z wyjściem, $(A^\infty, \langle h, t\rangle)$ - system.

Niech $zip : A^\infty \times A^\infty \to A^\infty$ spełnia:
$\langle h, t\rangle(zip\langle a \cdot v', w\rangle) = (a, zip\langle w, v'\rangle)$.

Czy prawdą jest, że $zip\langle a^\infty, b^\infty\rangle = (ab)^\infty$?

Niech $R \subseteq A^\infty \times A^\infty$ składa się z par:
$\{\langle zip\langle a^\infty, b^\infty\rangle, (ab)^\infty\rangle, \langle zip\langle b^\infty, a^\infty\rangle, (ba)^\infty\rangle\}$.

Pokażemy, że R jest bisymulacją, czyli
$\forall_{a \in A, \langle v, w\rangle \in R} v \xrightarrow{a} v' \text{ i } w \xrightarrow{a} w' \Rightarrow \langle v', w'\rangle \in R$.

$\langle h, t\rangle(zip\langle a \cdot v', w\rangle) = (a, zip\langle w, v'\rangle)$
Czy $zip\langle a^\infty, b^\infty\rangle = (ab)^\infty$**?**
$R = \{\langle zip\langle a^\infty, b^\infty\rangle, (ab)^\infty\rangle, \langle zip\langle b^\infty, a^\infty\rangle, (ba)^\infty\rangle\}$
Pokażemy, że R jest bisymulacją, czyli
$\forall_{a \in A, \langle v,w\rangle \in R} v \xrightarrow{a} v' \text{ i } w \xrightarrow{a} w' \Rightarrow \langle v', w'\rangle \in R$.

Rozważmy pierwszą parę z R.
$zip\langle a^\infty, b^\infty\rangle \xrightarrow{a} zip\langle b^\infty, a^\infty\rangle$

$\langle h, t\rangle(zip\langle a \cdot v', w\rangle) = (a, zip\langle w, v'\rangle)$

Czy $zip\langle a^\infty, b^\infty\rangle = (ab)^\infty$**?**

$R = \{\langle zip\langle a^\infty, b^\infty\rangle, (ab)^\infty\rangle, \langle zip\langle b^\infty, a^\infty\rangle, (ba)^\infty\rangle\}$

Pokażemy, że R jest bisymulacją, czyli

$\forall_{a \in A, \langle v, w\rangle \in R}\, v \xrightarrow{a} v' \text{ i } w \xrightarrow{a} w' \Rightarrow \langle v', w'\rangle \in R$.

Rozważmy pierwszą parę z R.

$zip\langle a^\infty, b^\infty\rangle \xrightarrow{a} zip\langle b^\infty, a^\infty\rangle$ oraz $(ab)^\infty \xrightarrow{a} (ba)^\infty$.

$\langle h, t\rangle(zip\langle a \cdot v', w\rangle) = (a, zip\langle w, v'\rangle)$
Czy $zip\langle a^\infty, b^\infty\rangle = (ab)^\infty$**?**
$R = \{\langle zip\langle a^\infty, b^\infty\rangle, (ab)^\infty\rangle, \langle zip\langle b^\infty, a^\infty\rangle, (ba)^\infty\rangle\}$
Pokażemy, że R jest bisymulacją, czyli
$\forall_{a \in A, \langle v, w\rangle \in R} v \xrightarrow{a} v' \text{ } i \text{ } w \xrightarrow{a} w' \Rightarrow \langle v', w'\rangle \in R$.

Rozważmy pierwszą parę z R.
$zip\langle a^\infty, b^\infty\rangle \xrightarrow{a} zip\langle b^\infty, a^\infty\rangle$ oraz $(ab)^\infty \xrightarrow{a} (ba)^\infty$.
Ale $\langle zip\langle b^\infty, a^\infty\rangle, (ba)^\infty\rangle \in R$.

Definicje koindukcyjne

Przykład 1 - “Zipujemy” strumienie

$\langle h, t\rangle(zip\langle a \cdot v', w\rangle) = (a, zip\langle w, v'\rangle)$

Czy $zip\langle a^\infty, b^\infty\rangle = (ab)^\infty$**?**

$R = \{\langle zip\langle a^\infty, b^\infty\rangle, (ab)^\infty\rangle, \langle zip\langle b^\infty, a^\infty\rangle, (ba)^\infty\rangle\}$

Pokażemy, że R jest bisymulacją, czyli

$\forall_{a\in A,\langle v,w\rangle\in R} v \xrightarrow{a} v' \; i \; w \xrightarrow{a} w' \Rightarrow \langle v', w'\rangle \in R.$

Rozważmy pierwszą parę z R.

$zip\langle a^\infty, b^\infty\rangle \xrightarrow{a} zip\langle b^\infty, a^\infty\rangle$ oraz $(ab)^\infty \xrightarrow{a} (ba)^\infty$.

Ale $\langle zip\langle b^\infty, a^\infty\rangle, (ba)^\infty\rangle \in R$.

Podobnie dla drugiej pary.

Definicje koindukcyjne

Przykład 1 - “Zipujemy” strumienie

$\langle h, t\rangle(zip\langle a \cdot v', w\rangle) = (a, zip\langle w, v'\rangle)$

Czy $zip\langle a^\infty, b^\infty\rangle = (ab)^\infty$**?**

$R = \{\langle zip\langle a^\infty, b^\infty\rangle, (ab)^\infty\rangle, \langle zip\langle b^\infty, a^\infty\rangle, (ba)^\infty\rangle\}$

Pokażemy, że R jest bisymulacją, czyli

$\forall_{a \in A, \langle v, w\rangle \in R} v \xrightarrow{a} v' \text{ i } w \xrightarrow{a} w' \Rightarrow \langle v', w'\rangle \in R$.

Rozważmy pierwszą parę z R.

$zip\langle a^\infty, b^\infty\rangle \xrightarrow{a} zip\langle b^\infty, a^\infty\rangle$ oraz $(ab)^\infty \xrightarrow{a} (ba)^\infty$.

Ale $\langle zip\langle b^\infty, a^\infty\rangle, (ba)^\infty\rangle \in R$.

Podobnie dla drugiej pary.

Czyli znaleźliśmy bisymulację, więc mamy dowód.

Definicje koindukcyjne

Przykład 2 - Konkatenacja strumieni (skończonych lub nieskończonych)

Niech $\cdot : A^\omega \times A^\omega \to A^\omega$ spełnia:

$$\frac{v \xrightarrow{a} v'}{v \cdot w \xrightarrow{a} v' \cdot w}, \quad \frac{v \downarrow \ \text{i} \ w \xrightarrow{a} w'}{v \cdot w \xrightarrow{a} v' \cdot w}, \quad \frac{v \downarrow \ \text{i} \ w \downarrow}{v \cdot w \downarrow}$$

Definicje koindukcyjne

Przykład 2 - Konkatenacja strumieni (skończonych lub nieskończonych)

Niech $\cdot : A^\omega \times A^\omega \to A^\omega$ spełnia:

$$\frac{v \xrightarrow{a} v'}{v \cdot w \xrightarrow{a} v' \cdot w}, \quad \frac{v \downarrow \ i \ w \xrightarrow{a} w'}{v \cdot w \xrightarrow{a} v' \cdot w}, \quad \frac{v \downarrow \ i \ w \downarrow}{v \cdot w \downarrow}$$

Czy prawdą jest, że $v \cdot \epsilon = \epsilon \cdot v = v$?

Definicje koindukcyjne

Przykład 2 - Konkatenacja strumieni (skończonych lub nieskończonych)

Niech $\cdot : A^\omega \times A^\omega \to A^\omega$ spełnia:

$$\frac{v \xrightarrow{a} v'}{v \cdot w \xrightarrow{a} v' \cdot w}, \quad \frac{v \downarrow \ i \ w \xrightarrow{a} w'}{v \cdot w \xrightarrow{a} v' \cdot w}, \quad \frac{v \downarrow \ i \ w \downarrow}{v \cdot w \downarrow}$$

Czy prawdą jest, że $v \cdot \epsilon = \epsilon \cdot v = v$?

Niech $R = \{\langle \epsilon \cdot v, v \rangle | v \in A^\omega\}$.

Widać, że R jest bisymulacją. Podobnie dla $v \cdot \epsilon$.
Znaleźliśmy bisymulacje, więc mamy dowód.

Definicje koindukcyjne

Przykład 2 - Konkatenacja strumieni (skończonych lub nieskończonych)

Niech $\cdot : A^\omega \times A^\omega \to A^\omega$ spełnia:

$$\frac{v \xrightarrow{a} v'}{v \cdot w \xrightarrow{a} v' \cdot w}, \quad \frac{v \downarrow \ i \ w \xrightarrow{a} w'}{v \cdot w \xrightarrow{a} v' \cdot w}, \quad \frac{v \downarrow \ i \ w \downarrow}{v \cdot w \downarrow}$$

Czy ta konkatenacja jest łączna?

Niech $\cdot : A^\omega \times A^\omega \to A^\omega$ spełnia:

$$\frac{v \xrightarrow{a} v'}{v \cdot w \xrightarrow{a} v' \cdot w}, \quad \frac{v \downarrow \text{ i } w \xrightarrow{a} w'}{v \cdot w \xrightarrow{a} v' \cdot w}, \quad \frac{v \downarrow \text{ i } w \downarrow}{v \cdot w \downarrow}$$

Czy ta konkatenacja jest łączna?

Niech $R = \{\langle (u \cdot v) \cdot w, u \cdot (v \cdot w) \rangle | u, v, w \in A^\omega\}$.

R jest bisymulacją, ale łatwiej pokazać, że
$S = R \cup \{\langle u, u \rangle | u \in A^\omega\}$ jest bisymulacją.

Definicje koindukcyjne

Przykład 2 - Konkatenacja strumieni (skończonych lub nieskończonych)

$$\frac{v \xrightarrow{a} v'}{v \cdot w \xrightarrow{a} v' \cdot w}, \quad \frac{v \downarrow \ i \ w \xrightarrow{a} w'}{v \cdot w \xrightarrow{a} v' \cdot w}, \quad \frac{v \downarrow \ i \ w \downarrow}{v \cdot w \downarrow}$$

Czy ta konkatenacja jest łączna?

$S = \{\langle (u \cdot v) \cdot w, u \cdot (v \cdot w)\rangle | u, v, w \in A^\omega\} \cup \{\langle u, u\rangle | u \in A^\omega\}$

Są trzy możliwości:

1. $\langle u, u \rangle$

Definicje koindukcyjne

Przykład 2 - Konkatenacja strumieni (skończonych lub nieskończonych)

$$\frac{v \xrightarrow{a} v'}{v \cdot w \xrightarrow{a} v' \cdot w}, \frac{v \downarrow \ i \ w \xrightarrow{a} w'}{v \cdot w \xrightarrow{a} v' \cdot w}, \frac{v \downarrow \ i \ w \downarrow}{v \cdot w \downarrow}$$

Czy ta konkatenacja jest łączna?

$S = \{\langle (u \cdot v) \cdot w, u \cdot (v \cdot w) \rangle | u, v, w \in A^\omega\} \cup \{\langle u, u \rangle | u \in A^\omega\}$

Są trzy możliwości:

1. $\langle u, u \rangle$

$$\frac{v \xrightarrow{a} v'}{v \cdot w \xrightarrow{a} v' \cdot w}, \frac{v \downarrow \; i \; w \xrightarrow{a} w'}{v \cdot w \xrightarrow{a} v' \cdot w}, \frac{v \downarrow \; i \; w \downarrow}{v \cdot w \downarrow}$$

Czy ta konkatenacja jest łączna?

$S = \{\langle (u \cdot v) \cdot w, u \cdot (v \cdot w) \rangle | u, v, w \in A^\omega\} \cup \{\langle u, u \rangle | u \in A^\omega\}$

Są trzy możliwości:

1. $\langle u, u \rangle$ - oczywiste
2. $\langle (\epsilon \cdot v) \cdot w, \epsilon \cdot (v \cdot w) >$

Definicje koindukcyjne

Przykład 2 - Konkatenacja strumieni (skończonych lub nieskończonych)

$$\frac{v \xrightarrow{a} v'}{v \cdot w \xrightarrow{a} v' \cdot w}, \quad \frac{v \downarrow \text{ i } w \xrightarrow{a} w'}{v \cdot w \xrightarrow{a} v' \cdot w}, \quad \frac{v \downarrow \text{ i } w \downarrow}{v \cdot w \downarrow}$$

Czy ta konkatenacja jest łączna?

$S = \{\langle (u \cdot v) \cdot w, u \cdot (v \cdot w) \rangle | u, v, w \in A^{\omega}\} \cup \{\langle u, u \rangle | u \in A^{\omega}\}$

Są trzy możliwości:

1. $\langle u, u \rangle$ - oczywiste
2. $\langle (\epsilon \cdot v) \cdot w, \epsilon \cdot (v \cdot w) >$

$$\frac{v \xrightarrow{a} v'}{v \cdot w \xrightarrow{a} v' \cdot w}, \frac{v \downarrow \ i \ w \xrightarrow{a} w'}{v \cdot w \xrightarrow{a} v' \cdot w}, \frac{v \downarrow \ i \ w \downarrow}{v \cdot w \downarrow}$$

Czy ta konkatenacja jest łączna?

$S = \{\langle (u \cdot v) \cdot w, u \cdot (v \cdot w) \rangle | u, v, w \in A^\omega\} \cup \{\langle u, u \rangle | u \in A^\omega\}$

Są trzy możliwości:

1. $\langle u, u \rangle$ - oczywiste
2. $\langle (\epsilon \cdot v) \cdot w, \epsilon \cdot (v \cdot w) >$ - $(\epsilon \cdot v) \cdot w = v \cdot w = \epsilon \cdot (v \cdot w)$, czyli jesteśmy $\langle u, u \rangle$
3. $\langle (u \cdot v) \cdot w, u \cdot (v \cdot w) \rangle, u \neq \epsilon$

Definicje koindukcyjne

Przykład 2 - Konkatenacja strumieni (skończonych lub nieskończonych)

$$\frac{v \xrightarrow{a} v'}{v \cdot w \xrightarrow{a} v' \cdot w}, \quad \frac{v \downarrow \ i \ w \xrightarrow{a} w'}{v \cdot w \xrightarrow{a} v' \cdot w}, \quad \frac{v \downarrow \ i \ w \downarrow}{v \cdot w \downarrow}$$

Czy ta konkatenacja jest łączna?

$S = \{\langle (u \cdot v) \cdot w, u \cdot (v \cdot w) \rangle | u, v, w \in A^\omega\} \cup \{\langle u, u \rangle | u \in A^\omega\}$

Są trzy możliwości:

1. $\langle u, u \rangle$ - oczywiste
2. $\langle (\epsilon \cdot v) \cdot w, \epsilon \cdot (v \cdot w) >$ - $(\epsilon \cdot v) \cdot w = v \cdot w = \epsilon \cdot (v \cdot w)$, czyli jesteśmy $\langle u, u \rangle$
3. $\langle (u \cdot v) \cdot w, u \cdot (v \cdot w) \rangle, u \neq \epsilon$

Definicje koindukcyjne

Przykład 2 - Konkatenacja strumieni (skończonych lub nieskończonych)

$$\frac{v \xrightarrow{a} v'}{v \cdot w \xrightarrow{a} v' \cdot w}, \quad \frac{v \downarrow \text{ i } w \xrightarrow{a} w'}{v \cdot w \xrightarrow{a} v' \cdot w}, \quad \frac{v \downarrow \text{ i } w \downarrow}{v \cdot w \downarrow}$$

Czy ta konkatenacja jest łączna?

$S = \{\langle (u \cdot v) \cdot w, u \cdot (v \cdot w) \rangle | u, v, w \in A^\omega\} \cup \{\langle u, u \rangle | u \in A^\omega\}$

Są trzy możliwości:

1. $\langle u, u \rangle$ - oczywiste
2. $\langle (\epsilon \cdot v) \cdot w, \epsilon \cdot (v \cdot w) >$ - $(\epsilon \cdot v) \cdot w = v \cdot w = \epsilon \cdot (v \cdot w)$, czyli jesteśmy $\langle u, u \rangle$
3. $\langle (u \cdot v) \cdot w, u \cdot (v \cdot w) \rangle, u \neq \epsilon$ - $u \xrightarrow{a} u'$, więc $(u \cdot v) \cdot w \xrightarrow{a} (u' \cdot v) \cdot w$ oraz $u \cdot (v \cdot w) \xrightarrow{a} u' \cdot (v \cdot w)$, czyli pozostajemy w R.

Znaleźliśmy bisymulacje, więc mamy dowód.

Niech $\oplus : \{1\}^\omega \times \{1\}^\omega \to \{1\}^\omega$ spełnia:

$$\frac{n \to n'}{n \oplus m \to n' \oplus m}, \frac{n\downarrow \ \ i\ m \to m'}{n \oplus m \to n \oplus m'}, \frac{n\downarrow \ \ i\ m\downarrow}{n \oplus m\downarrow},$$

gdzie $s(n) \to n$, s - następnik.

Niech $\oplus : \{1\}^\omega \times \{1\}^\omega \to \{1\}^\omega$ spełnia:

$$\frac{n \to n'}{n \oplus m \to n' \oplus m}, \frac{n \downarrow \; i \; m \to m'}{n \oplus m \to n \oplus m'}, \frac{n \downarrow \; i \; m \downarrow}{n \oplus m \downarrow},$$

gdzie $s(n) \to n$, s - następnik.

Czy $0 \oplus m = m$?

Niech $\oplus : \{1\}^\omega \times \{1\}^\omega \to \{1\}^\omega$ spełnia:

$$\frac{n \to n'}{n \oplus m \to n' \oplus m}, \frac{n\downarrow \text{ i } m \to m'}{n \oplus m \to n \oplus m'}, \frac{n\downarrow \text{ i } m\downarrow}{n \oplus m\downarrow},$$

gdzie $s(n) \to n$, s - następnik.

Czy $0 \oplus m = m$? Tak (jak konkatenacja z ϵ)

Niech $\oplus : \{1\}^\omega \times \{1\}^\omega \to \{1\}^\omega$ spełnia:

$$\frac{n \to n'}{n \oplus m \to n' \oplus m}, \frac{n\downarrow \ i \ m \to m'}{n \oplus m \to n \oplus m'}, \frac{n\downarrow \ i \ m\downarrow}{n \oplus m\downarrow},$$

gdzie $s(n) \to n$, s - następnik.

Czy $0 \oplus m = m$? Tak (jak konkatenacja z ϵ)

Czy $s(n) \oplus m = s(n \oplus m)$?

Definicje koindukcyjne

Przykład 3 - Dodawanie liczb naturalnych (w systemie unarnym)

Niech $\oplus : \{1\}^\omega \times \{1\}^\omega \to \{1\}^\omega$ spełnia:

$$\frac{n \to n'}{n \oplus m \to n' \oplus m'}, \frac{n\downarrow \;\; i \; m \to m'}{n \oplus m \to n \oplus m'}, \frac{n\downarrow \;\; i \; m\downarrow}{n \oplus m \downarrow},$$

gdzie $s(n) \to n$, s - następnik.

Czy $0 \oplus m = m$? Tak (jak konkatenacja z ϵ)

Czy $s(n) \oplus m = s(n \oplus m)$? Tak, bo
$R = \{\langle s(n) \oplus m, s(n \oplus m)\rangle\} \cup \{\langle n, n\rangle\}$ jest bisymulacją.

Definicje koindukcyjne

Przykład 3 - Dodawanie liczb naturalnych (w systemie unarnym)

$$\frac{n \to n'}{n \oplus m \to n' \oplus m}, \frac{n \downarrow \;\; i \; m \to m'}{n \oplus m \to n \oplus m'}, \frac{n \downarrow \;\; i \; m \downarrow}{n \oplus m \downarrow},$$

gdzie $s(n) \to n$, s - następnik.

Czy to dodawanie jest przemienne?

$$\frac{n \to n'}{n \oplus m \to n' \oplus m}, \frac{n \downarrow \ i \ m \to m'}{n \oplus m \to n \oplus m'}, \frac{n \downarrow \ i \ m \downarrow}{n \oplus m \downarrow},$$

gdzie $s(n) \to n$, s - następnik.

Czy to dodawanie jest przemienne?
Najpierw pokażemy, że $n \oplus s(m) = s(n) \oplus m$.
$R = \{\langle n \oplus s(m), s(n) \oplus m \rangle\} \cup \{\langle n, n \rangle\}$ jest bisymulacją.

Definicje koindukcyjne

Przykład 3 - Dodawanie liczb naturalnych (w systemie unarnym)

$$\frac{n \to n'}{n \oplus m \to n' \oplus m}, \frac{n \downarrow \ i \ m \to m'}{n \oplus m \to n \oplus m'}, \frac{n \downarrow \ i \ m \downarrow}{n \oplus m \downarrow},$$

gdzie $s(n) \to n$, s - następnik.

Czy to dodawanie jest przemienne?
Najpierw pokażemy, że $n \oplus s(m) = s(n) \oplus m$.
$R = \{\langle n \oplus s(m), s(n) \oplus m \rangle\} \cup \{\langle n, n \rangle\}$ jest bisymulacją.

Korzystając z tego otrzymujemy, że $Q = \{\langle n \oplus m, m \oplus n \rangle\}$ jest bisymulacją.

Znaleźliśmy bisymulacje, więc mamy dowód.

Dziękuję za uwagę