Bisymulacja

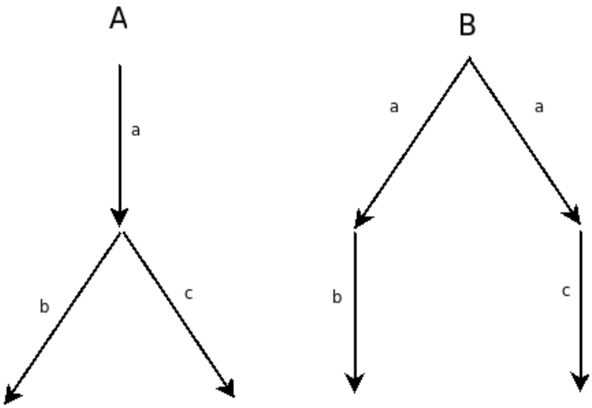
Niezawodność systemów współbieżnych i obiektowych

Grzegorz Maj

11.03.2009

Bisymulacja

Czym będziemy się zajomwać?



Plan prezentacji

- Silna bisymulacja i silna równoważność

Plan prezentacji

- Silna bisymulacja i silna równoważność
- Bisymulacja i równoważność obserwacyjna

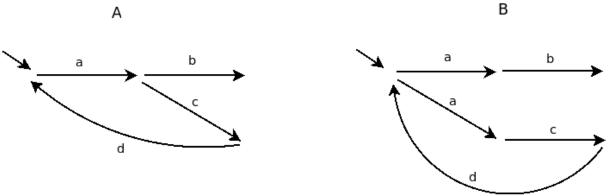
Plan prezentacji

- Silna bisymulacja i silna równoważność
- Bisymulacja i równoważność obserwacyjna
- Gra bisymulacyjna

Plan prezentacji

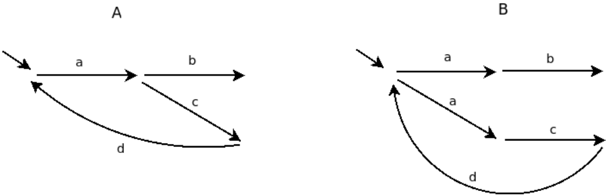
- Silna bisymulacja i silna równoważność
- Bisymulacja i równoważność obserwacyjna
- Gra bisymulacyjna
- Indukcja i koindukcja

Przykład 1



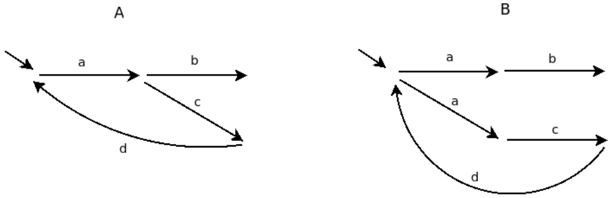
- Jakie są języki akceptowane?

Przykład 1



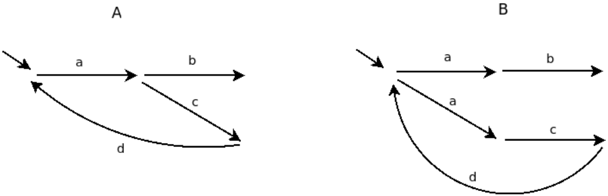
- Jakie są języki akceptowane?

Przykład 1



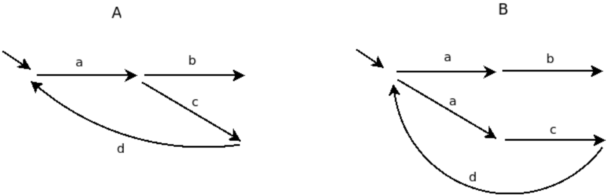
- Jakie są języki akceptowane? *(acd)*ab*
- Jakie są różnice pomiędzy tymi automatami?

Przykład 1



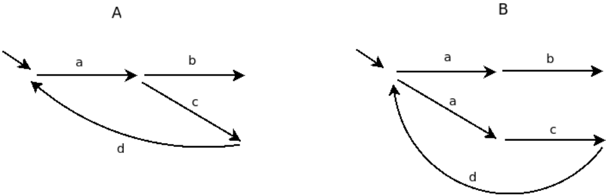
- Jakie są języki akceptowane? *(acd)*ab*
- Jakie są różnice pomiędzy tymi automatami?

Przykład 1



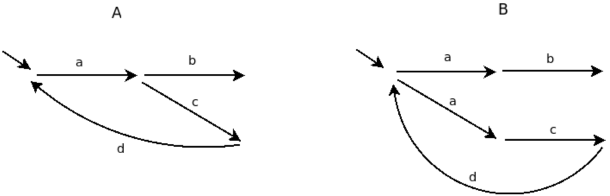
- Jakie są języki akceptowane? *(acd)*ab*
- Jakie są różnice pomiędzy tymi automatami? *determinizm*
- Jakie są różnice pomiędzy tymi systemami?

Przykład 1



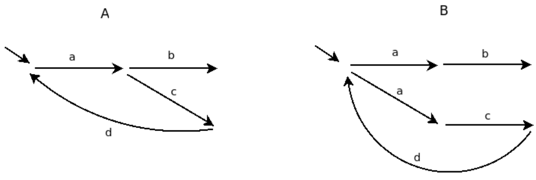
- Jakie są języki akceptowane? *(acd)*ab*
- Jakie są różnice pomiędzy tymi automatami? *determinizm*
- Jakie są różnice pomiędzy tymi systemami?

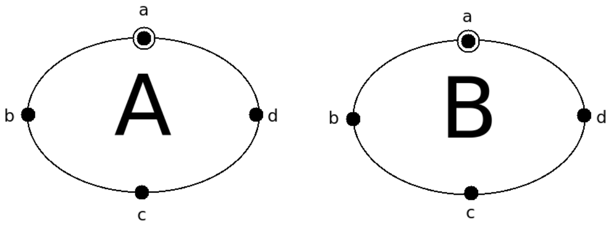
Przykład 1



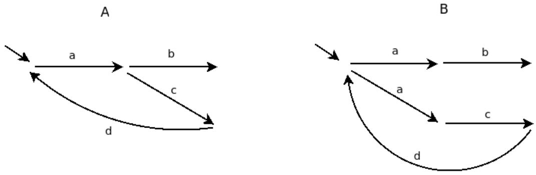
- Jakie są języki akceptowane? *(acd)*ab*
- Jakie są różnice pomiędzy tymi automatami? *determinizm*
- Jakie są różnice pomiędzy tymi systemami? *zobaczmy..*

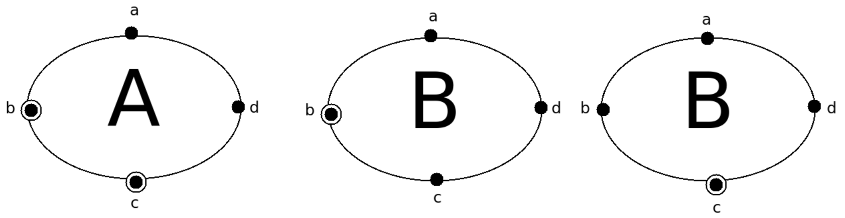
Przykład 1 c.d.



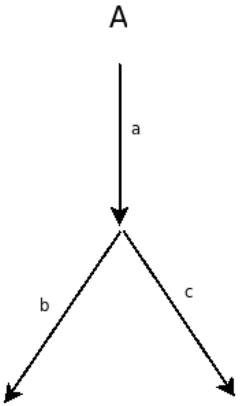


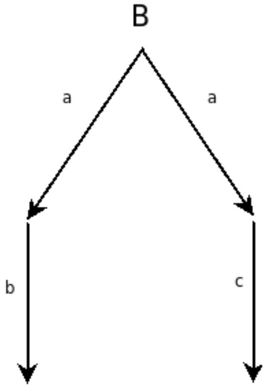
Przykład 1 c.d.



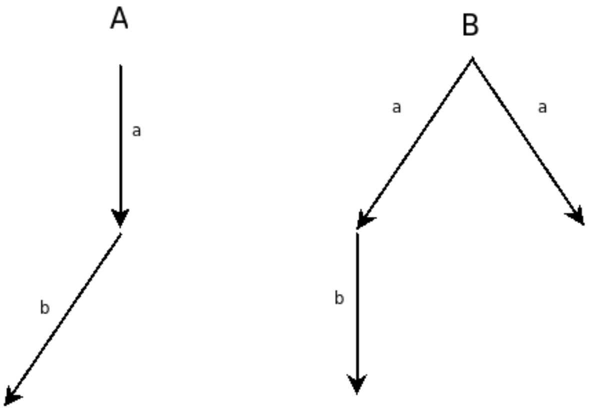


Przykład 1 - uproszczenie



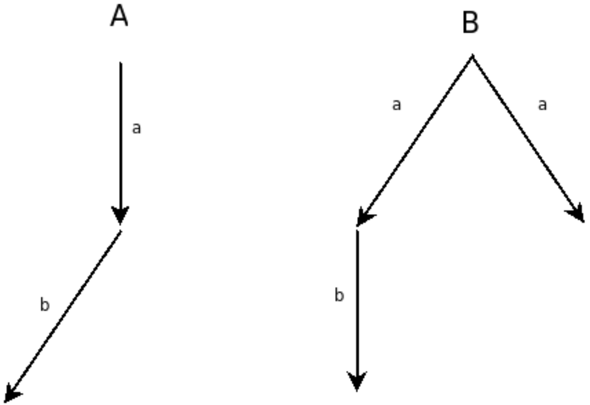


Przykład 1 - kolejne uproszczenie



W jaki sposób je rozróżnić?

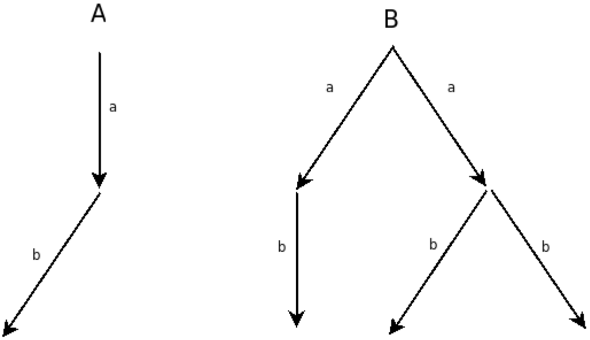
Przykład 1 - kolejne uproszczenie



W jaki sposób je rozróżnić? Może identyczność grafów..

Przykład 1 c.d.

A co z tym:



Silna bisymulacja i silna równoważność

Silna bisymulacja

Równoważność

P i Q są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej akcji α, każdy α-następnik P jest równoważny z pewnym α-następnikiem Q i na odwrót.

“Definicja”

P $\sim$ Q wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej akcji α:
(i) jeśli P $\xrightarrow{\alpha}$ P’, to istnieje Q’ takie, że Q $\xrightarrow{\alpha}$ Q’ oraz P’ $\sim$ Q’,
(ii) jeśli Q $\xrightarrow{\alpha}$ Q’, to istnieje P’ takie, że P $\xrightarrow{\alpha}$ P’ oraz P’ $\sim$ Q’.

Silna bisymulacja

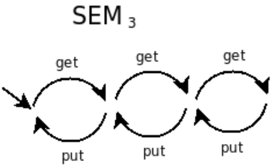
Definicja

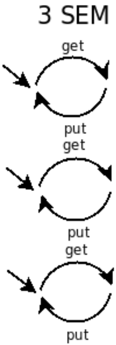
Niech S będzie zbiorem stanów ($P, Q, .. \in S$), na którym dana jest rodzina relacji binarnych $\{\xrightarrow{a} \subseteq S \times S\}_{a \in A}$.

Silną bisymulacją nazwiemy relację binarną R na S taką, że jeśli $(P, Q) \in R$,
(i) $P \xrightarrow{a} P' \Rightarrow \exists_{Q'} Q \xrightarrow{a} Q' \ i \ (P', Q') \in R$,
(ii) $Q \xrightarrow{a} Q' \Rightarrow \exists_{P'} P \xrightarrow{a} P' \ i \ (P', Q') \in R$.

Silna bisymulacja

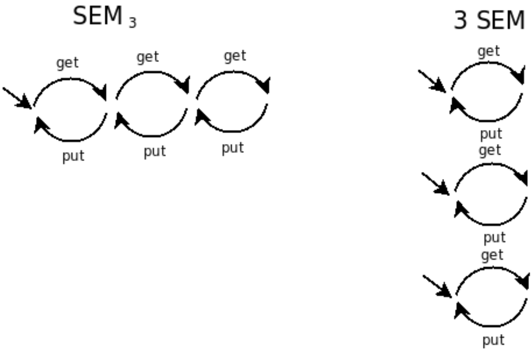
Przykład





Silna bisymulacja

Przykład



Znajdź silną bisymulację, która zawiera parę $(SEM_3, SEM|SEM|SEM)$.

Czy silna bisymulacja jest:

- symetryczna?

Czy silna bisymulacja jest:

- symetryczna?

Czy silna bisymulacja jest:

- symetryczna? Nie, patrz ostatni przykład
- zwrotna?

Silna bisymulacja

Własności

Czy silna bisymulacja jest:

- symetryczna? Nie, patrz ostatni przykład
- zwrotna?

Czy silna bisymulacja jest:

- symetryczna? Nie, patrz ostatni przykład
- zwrotna? Nie, patrz ostatni przykład
- więc jaka?

Czy silna bisymulacja jest:

- symetryczna? Nie, patrz ostatni przykład
- zwrotna? Nie, patrz ostatni przykład
- więc jaka?

Czy silna bisymulacja jest:

- symetryczna? Nie, patrz ostatni przykład
- zwrotna? Nie, patrz ostatni przykład
- więc jaka?

$\varnothing$ jest świetnym przykładem silnej bisymulacji!

Twierdzenie

Niech $P_i, i = 1, 2, ..$ - silne bisymulacje. Wówczas:

1. Id_S
2. P_i^{-1}
3. $P_1 \circ P_2$
4. $\bigcup_{i \in I} P_i$

są silnymi bisymulacjami.

Silna równoważność

Jesteśmy już gotowi na wprowadzenie silnej równoważności.

Definicja

P i Q są *silnie równoważne* (ozn. $P \sim Q$), gdy $(P, Q) \in R$ dla pewnej silnej bisymulacji R.

Silna równoważność

Jesteśmy już gotowi na wprowadzenie silnej równoważności.

Definicja

P i Q są *silnie równoważne* (ozn. $P \sim Q$), gdy $(P, Q) \in R$ dla pewnej silnej bisymulacji R.

Inaczej:
$\sim \; = \; \bigcup\{R : R \text{ jest silną bisymulacją}\}$.

Silna równoważność

Uwaga

1. $\sim$ jest największą silną bisymulacją
2. $\sim$ jest relacją równoważności

Równoważność - przypomnienie

“Definicja”

P $\sim$ Q wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej akcji α:
(i) jeśli P $\xrightarrow{\alpha}$ P’, to istnieje Q’ takie, że Q $\xrightarrow{\alpha}$ Q’ oraz P’ $\sim$ Q’,
(ii) jeśli Q $\xrightarrow{\alpha}$ Q’, to istnieje P’ takie, że P $\xrightarrow{\alpha}$ P’ oraz P’ $\sim$ Q’.

Twierdzenie

Wprowadzona relacja $\sim$ spełnia powyższy warunek.

Dowód, że $\sim$ spełnia zadany warunek

Definicja

P $\sim'$ Q wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej akcji α:
(i) jeśli P $\xrightarrow{\alpha}$ P', to istnieje Q' takie, że Q $\xrightarrow{\alpha}$ Q' oraz P' $\sim$ Q',
(ii) jeśli Q $\xrightarrow{\alpha}$ Q', to istnieje P' takie, że P $\xrightarrow{\alpha}$ P' oraz P' $\sim$ Q'.

Dowód, że $\sim$ spełnia zadany warunek

Definicja

P $\sim'$ Q wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej akcji α:
(i) jeśli P $\xrightarrow{\alpha}$ P', to istnieje Q' takie, że Q $\xrightarrow{\alpha}$ Q' oraz P' $\sim$ Q',
(ii) jeśli Q $\xrightarrow{\alpha}$ Q', to istnieje P' takie, że P $\xrightarrow{\alpha}$ P' oraz P' $\sim$ Q'.

$\sim$ jest silną bisymulacją, więc z definicji mamy:
$P \sim Q \Rightarrow P \sim' Q$.

Dowód, że $\sim$ spełnia zadany warunek

Definicja

P $\sim'$ Q wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej akcji α:
(i) jeśli P $\xrightarrow{\alpha}$ P', to istnieje Q' takie, że Q $\xrightarrow{\alpha}$ Q' oraz P' $\sim$ Q',
(ii) jeśli Q $\xrightarrow{\alpha}$ Q', to istnieje P' takie, że P $\xrightarrow{\alpha}$ P' oraz P' $\sim$ Q'.

$\sim$ jest silną bisymulacją, więc z definicji mamy:
$P \sim Q \Rightarrow P \sim' Q$.
Ponadto $\sim'$ jest silną bisymulacją, więc $P \sim' Q \Rightarrow P \sim Q$.

Dowód, że $\sim$ spełnia zadany warunek

Definicja

P $\sim'$ Q wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej akcji α:
(i) jeśli P $\xrightarrow{\alpha}$ P', to istnieje Q' takie, że Q $\xrightarrow{\alpha}$ Q' oraz P' $\sim$ Q',
(ii) jeśli Q $\xrightarrow{\alpha}$ Q', to istnieje P' takie, że P $\xrightarrow{\alpha}$ P' oraz P' $\sim$ Q'.

$\sim$ jest silną bisymulacją, więc z definicji mamy:
$P \sim Q \Rightarrow P \sim' Q$.
Ponadto $\sim'$ jest silną bisymulacją, więc $P \sim' Q \Rightarrow P \sim Q$.
Czyli $\sim$ spełnia zadany warunek.

Bisymulacja i równoważność obserwacyjna

Po co nam coś słabszego?

Dotychczas w naszym modelu była tylko komunikacja pomiędzy agentami.
Wprowadzamy specjalną akcję τ, oznaczającą “sprawy własne”.

Po co nam coś słabszego?

Dotychczas w naszym modelu była tylko komunikacja pomiędzy agentami.
Wprowadzamy specjalną akcję τ, oznaczającą “sprawy własne”.

Definicja

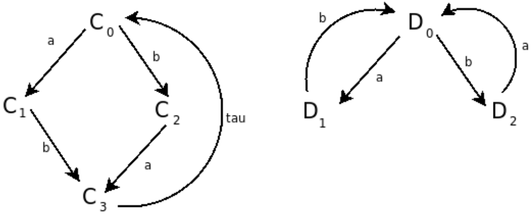
Niech S będzie zbiorem stanów ($P, Q, .. \in S$), na którym dana jest rodzina relacji binarnych $\{\xrightarrow{\alpha} \subseteq S \times S\}_{\alpha \in A}$.

(Słabą) bisymulacją nazwiemy relację binarną R na S taką, że jeśli $(P, Q) \in R$,

(i) $P \xrightarrow{\alpha} P' \Rightarrow \exists_{Q'} Q \xrightarrow{\tau *} \xrightarrow{\widehat{\alpha}} \xrightarrow{\tau *} Q'$ i $(P', Q') \in R$,

(ii) $Q \xrightarrow{\alpha} Q' \Rightarrow \exists_{P'} P \xrightarrow{\tau *} \xrightarrow{\widehat{\alpha}} \xrightarrow{\tau *} P'$ i $(P', Q') \in R$,

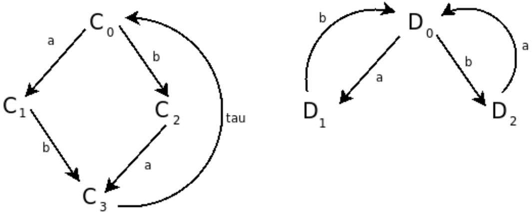
gdzie $\widehat{a} = a, \widehat{\tau} = \epsilon$.



Znajdź bisymulację, która zawiera parę (C_0, D_0).

Bisymulacja

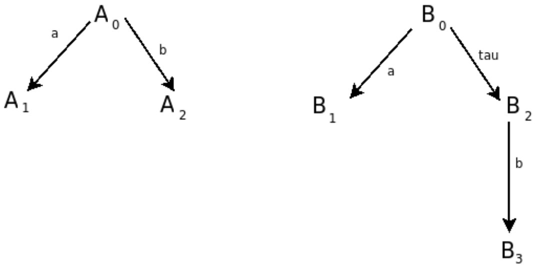
Przykład 1



Znajdź bisymulację, która zawiera parę (C_0, D_0).
Znajdź silną bisymulację, która zawiera parę (C_0, D_0).

Bisymulacja

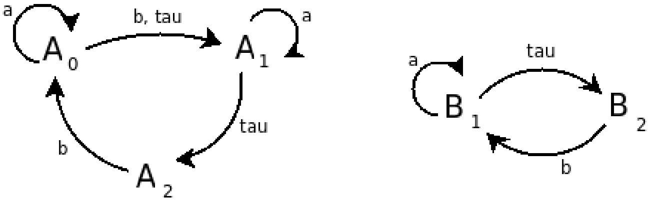
Przykład 2



Znajdź bisymulację, która zawiera parę (A_0, B_0).

Bisymulacja

Przykład 3



Znajdź bisymulację, która zawiera parę (A_0, B_1).

Obserwacyjna równoważność

Definicja

P i Q są *obserwacyjne równoważne* (ozn. $P \approx Q$), gdy $(P, Q) \in R$ dla pewnej bisymulacji R.

Obserwacyjna równoważność

Definicja

P i Q są *obserwacyjne równoważne* (ozn. $P \approx Q$), gdy $(P, Q) \in R$ dla pewnej bisymulacji R.

Inaczej:
$\approx \; = \; \bigcup\{R : R \text{ jest bisymulacją}\}$.

Twierdzenie

Niech $P_i, i = 1, 2, ..$ - bisymulacje. Wówczas:

1. Id_S
2. P_i^{-1}
3. $P_1 \circ P_2$
4. $\bigcup_{i \in I} P_i$

są bisymulacjami.

Uwaga

1. $\approx$ jest największą bisymulacją
2. $\approx$ jest relacją równoważności

Gra bisymulacyjna

Dwóch graczy: Spoiler i Duplikator

Dwóch graczy: Spoiler i Duplikator

Pozycje: pary stanów $(P, Q) \in S$

Dwóch graczy: Spoiler i Duplikator

Pozycje: pary stanów $(P, Q) \in S$

Przebieg gry:
W pozycji (P, Q) Spoiler wykonujer ruch P $\stackrel{\alpha}{\rightarrow}$ P' (lub Q $\stackrel{\alpha}{\rightarrow}$ Q'). Duplikator odpowiada, wykonując ruch Q $\stackrel{\alpha}{\rightarrow}$ Q' (odpowiednio: P $\stackrel{\alpha}{\rightarrow}$ P'). Następnie rozgrywkę kontynuuje się od (P', Q').

Dwóch graczy: Spoiler i Duplikator

Pozycje: pary stanów $(P, Q) \in S$

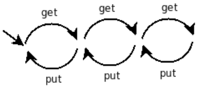
Przebieg gry:
W pozycji (P, Q) Spoiler wykonujer ruch P $\xrightarrow{\alpha}$ P' (lub Q $\xrightarrow{\alpha}$ Q'). Duplikator odpowiada, wykonując ruch Q $\xrightarrow{\alpha}$ Q' (odpowiednio: P $\xrightarrow{\alpha}$ P'). Następnie rozgrywkę kontynuuje się od (P', Q').

Rozstrzygnięcie:
Gracz, który nie może wykonać ruchu, przegrywa. W przypadku rozgrywki nieskończonej zawsze wygrywa Duplikator.

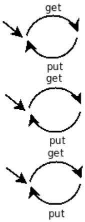
Gra bisymulacyjna

Przykład

SEM_3



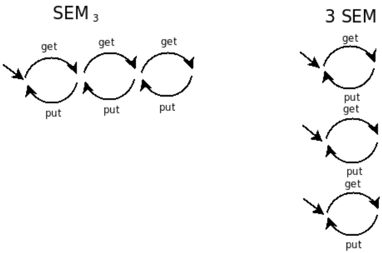
3 SEM



$$\{(SEM_3, SEM|SEM|SEM), (SEM'_3, SEM'|SEM|SEM), (SEM'_3, SEM|SEM'|SEM), (SEM'_3, SEM|SEM|SEM')$$

$$(SEM''_3, SEM'|SEM'|SEM), (SEM''_3, SEM'|SEM|SEM'), (SEM''_3, SEM|SEM'|SEM'), (SEM'''_3, SEM'|SEM'|SEM')\}$$

jest silną bisymulacją.



$\{(SEM_3, SEM|SEM|SEM), (SEM_3', SEM'|SEM|SEM), (SEM_3', SEM|SEM'|SEM), (SEM_3', SEM|SEM|SEM')$

$(SEM_3'', SEM'|SEM'|SEM), (SEM_3'', SEM'|SEM|SEM'), (SEM_3'', SEM|SEM'|SEM'), (SEM_3''', SEM'|SEM'|SEM')\}$

jest silną bisymulacją.

Jest to “przepis na grę” dla Duplikatora!

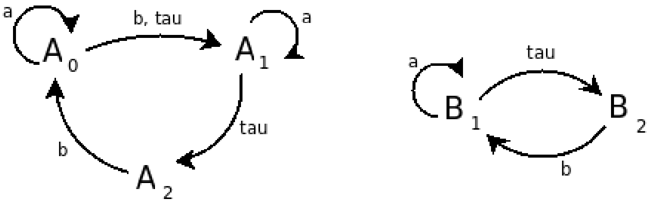
Gra bisymulacyjna

Twierdzenie

$P \sim Q$ wtedy i tylko wtedy, gdy Duplikator ma strategię wygrywającą w grze rozpoczynającej się od (P, Q).

Gra bisymulacyjna

Analogicznie dla (słabej) bisymulacji:



$\{(A_0, B_1), (A_1, B_1), (A_2, B_2)\}$

Gra bisymulacyjna