Analiza przedziałowa

Aleksander Zabłocki

6 maja 2009

Plan

Plan

1. Abstrakcyjna interpretacja
2. Punkty stałe w $\overline{\mathbb{Z}}$
   - Wstęp
   - Poprawianie strategii
   - Wzbogacanie
   - Metoda w całości
3. Przedziały

Teoria mnogości

$(X, \leq)$ - porządek częściowy

- $A \subseteq X$ - *skierowany*, jeśli $\forall_{a,b \in A} \exists_{c \in A}\, a, b \leq c$
- $(X, \leq)$ - *zupełny*, jeśli każdy zbiór skierowany ma kres górny
- Jeśli $(X, \leq)$ - zupełny, to $f : X \to X$ - *ciągła*, jeśli $\forall_{A \subseteq X-\text{skier.}}\, f(\sup A) = \sup \vec{f}(A)$ (w szczególności f zachowuje $\leq$)
- $(X, \leq)$ - *krata (ograniczona)*, jeśli:
    - Istnieje element najmniejszy i największy (ozn. $\perp, \top$)
    - Każdy podzbiór dwuelementowy $\{a, b\}$ ma kresy (ozn.: $a \vee b = \sup\{a, b\}, \quad a \wedge b = \inf\{a, b\}$)

Teoria mnogości

$(X, \leq)$ - porządek częściowy

- $A \subseteq X$ - *skierowany*, jeśli $\forall_{a,b \in A} \exists_{c \in A}\, a, b \leq c$
- $(X, \leq)$ - *zupełny*, jeśli każdy zbiór skierowany ma kres górny
- Jeśli $(X, \leq)$ - zupełny, to $f : X \to X$ - *ciągła*, jeśli
$$\forall_{A \subseteq X - \text{skier.}}\ f(\sup A) = \sup \vec{f}(A)$$ (w szczególności f zachowuje $\leq$)
- $(X, \leq)$ - *krata (ograniczona)*, jeśli:
  - Istnieje element najmniejszy i największy (ozn. $\perp, \top$)
  - Każdy podzbiór dwuelementowy $\{a, b\}$ ma kresy (ozn.: $a \vee b = \sup\{a, b\}, \quad a \wedge b = \inf\{a, b\}$)

Teoria mnogości

$(X, \leq)$ - porządek częściowy

- $A \subseteq X$ - *skierowany*, jeśli $\forall_{a,b \in A} \exists_{c \in A}\, a, b \leq c$
- $(X, \leq)$ - *zupełny*, jeśli każdy zbiór skierowany ma kres górny
- Jeśli $(X, \leq)$ - zupełny, to $f : X \to X$ - *ciągła*, jeśli
  $$\forall_{A \subseteq X-\text{skier.}}\ f(\sup A) = \sup \vec{f}(A)$$ (w szczególności f zachowuje $\leq$)
- $(X, \leq)$ - *krata (ograniczona)*, jeśli:
  - Istnieje element najmniejszy i największy (ozn. $\perp, \top$)
  - Każdy podzbiór dwuelementowy $\{a, b\}$ ma kresy (ozn.: $a \vee b = \sup\{a, b\}, \quad a \wedge b = \inf\{a, b\}$)

Teoria mnogości

$(X, \leq)$ - porządek częściowy

- $A \subseteq X$ - *skierowany*, jeśli $\forall_{a,b \in A} \exists_{c \in A}\, a, b \leq c$
- $(X, \leq)$ - *zupełny*, jeśli każdy zbiór skierowany ma kres górny
- Jeśli $(X, \leq)$ - zupełny, to $f : X \to X$ - *ciągła*, jeśli $$\forall_{A \subseteq X - \text{skier.}}\, f(\sup A) = \sup \vec{f}(A)$$ (w szczególności f zachowuje $\leq$)
- $(X, \leq)$ - *krata (ograniczona)*, jeśli:
    - Istnieje element najmniejszy i największy (ozn. $\perp, \top$)
    - Każdy podzbiór dwuelementowy $\{a, b\}$ ma kresy (ozn.: $a \vee b = \sup\{a, b\}, \quad a \wedge b = \inf\{a, b\}$)

Sprzężenie Galois

- S - przestrzeń stanów
- Krata wiedzy o programie: $(2^S, \emptyset, S, \subseteq)$
- Abstrakcyjna krata zupełna opisów: $(L, \bot, \top, \sqsubseteq)$
- Konkretyzacja: $\gamma : L \to 2^S$ - monotoniczne, zachowuje $\sqcap$
- Abstrakcja $\alpha : 2^S \to L$, określona wzorem

$$\alpha(P) = \inf\{p : \gamma(p) \supseteq P\}$$

- Sprzężenie Galois: dla dowolnych p, P

$$P \subseteq \gamma(p) \;\Leftrightarrow\; \alpha(P) \sqsubseteq p$$

Sprzężenie Galois

- S - przestrzeń stanów
- Krata wiedzy o programie: $(2^S, \emptyset, S, \subseteq)$
- Abstrakcyjna krata zupełna opisów: $(L, \bot, \top, \sqsubseteq)$
- Konkretyzacja: $\gamma : L \to 2^S$ - monotoniczne, zachowuje $\sqcap$
- Abstrakcja $\alpha : 2^S \to L$, określona wzorem

$$\alpha(P) = \inf\{p : \gamma(p) \supseteq P\}$$

- Sprzężenie Galois: dla dowolnych p, P

$$P \subseteq \gamma(p) \;\Leftrightarrow\; \alpha(P) \sqsubseteq p$$

Sprzężenie Galois

- S - przestrzeń stanów
- Krata wiedzy o programie: $(2^S, \emptyset, S, \subseteq)$
- Abstrakcyjna krata zupełna opisów: $(L, \bot, \top, \sqsubseteq)$
- Konkretyzacja: $\gamma : L \to 2^S$ - monotoniczne, zachowuje $\sqcap$
- Abstrakcja $\alpha : 2^S \to L$, określona wzorem

$$\alpha(P) = \inf\{p : \gamma(p) \supseteq P\}$$

- Sprzężenie Galois: dla dowolnych p, P

$$P \subseteq \gamma(p) \ \Leftrightarrow \ \alpha(P) \sqsubseteq p$$

Sprzężenie Galois

- S - przestrzeń stanów
- Krata wiedzy o programie: $(2^S, \emptyset, S, \subseteq)$
- Abstrakcyjna krata zupełna opisów: $(L, \perp, \top, \sqsubseteq)$
- Konkretyzacja: $\gamma : L \to 2^S$ - monotoniczne, zachowuje $\sqcap$
- Abstrakcja $\alpha : 2^S \to L$, określona wzorem

$$\alpha(P) = \inf\{p \,:\, \gamma(p) \supseteq P\}$$

- Sprzężenie Galois: dla dowolnych p, P

$$P \subseteq \gamma(p) \;\Leftrightarrow\; \alpha(P) \sqsubseteq p$$

Sprzężenie Galois

- S - przestrzeń stanów
- Krata wiedzy o programie: $(2^S, \emptyset, S, \subseteq)$
- Abstrakcyjna krata zupełna opisów: $(L, \bot, \top, \sqsubseteq)$
- Konkretyzacja: $\gamma : L \to 2^S$ - monotoniczne, zachowuje $\sqcap$
- Abstrakcja $\alpha : 2^S \to L$, określona wzorem

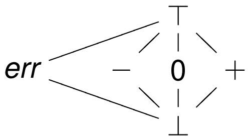
$$\alpha(P) = \inf\{p \; : \; \gamma(p) \supseteq P\}$$

- Sprzężenie Galois: dla dowolnych p, P

$$P \subseteq \gamma(p) \;\Leftrightarrow\; \alpha(P) \sqsubseteq p$$

Przykłady

- Opis znaku liczby całkowitej, obsługa błędu



$$\xrightarrow{\gamma} \quad 2^{\mathbb{Z}\cup\{err\}}$$

$$\alpha(\{1,2\}) = +, \qquad \alpha(\{0,1\}) = \top$$

- Arytmetyka przedziałowa

$$\left(\mathbb{I} = \{[a,b] \,:\, a,b \in \overline{\mathbb{Z}}\}, \emptyset, \overline{\mathbb{Z}}, \subseteq\right) \quad \xrightarrow{\gamma} \quad 2^{\overline{\mathbb{Z}}}, \qquad \overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}\cup\{-\infty, \infty$$

$$\alpha(A) = [\inf A, \sup A]$$

Przykłady

- Opis znaku liczby całkowitej, obsługa błędu

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & \top \arrow[dll, dash] \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \xrightarrow{\gamma} & 2^{\mathbb{Z}\cup\{err\}} \\
 & err \arrow[drr, dash] & - \arrow[dr, dash] & 0 \arrow[d, dash] & + \arrow[dl, dash] & \\
 & & & \bot & &
\end{tikzcd}
$$

$$\alpha(\{1,2\}) = +, \qquad \alpha(\{0,1\}) = \top$$

- Arytmetyka przedziałowa

$$\left(\mathbb{I} = \{[a,b] \,:\, a,b \in \overline{\mathbb{Z}}\}, \emptyset, \overline{\mathbb{Z}}, \subseteq\right) \xrightarrow{\gamma} 2^{\overline{\mathbb{Z}}}, \qquad \overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}\cup\{-\infty, \infty$$

$$\alpha(A) = [\inf A, \sup A]$$

Abstrakcja wyższego poziomu

- Opis krotek stanów: $L_i \underset{\alpha_i}{\overset{\gamma_i}{\rightleftarrows}} 2^{S_i}$, wtedy $\prod L_i \underset{\alpha}{\overset{\gamma}{\rightleftarrows}} 2^{\prod S_i}$

$$\gamma = \prod \gamma_i, \qquad \alpha(A) = \Big(\alpha_i(\pi_i(A))\Big)_{i \in I}$$

- Opis funkcji: $L \underset{\alpha}{\overset{\gamma}{\rightleftarrows}} C$, $f : C \to C$
  (uwaga: jeśli $\varphi : S \to S$ oraz $C = 2^S$, to interesuje nas $f = \vec{\varphi}$)
  - $f_* : L \to L$ „dobrze modeluje” f, jeśli

$$\gamma(p) \supseteq f(\gamma(q)) \Leftrightarrow p \sqsupseteq f_*(q)$$

  - Rozwiązanie: $f_* = \alpha \circ f \circ \gamma$

Abstrakcja wyższego poziomu

- Opis krotek stanów: $L_i \underset{\alpha_i}{\overset{\gamma_i}{\rightleftarrows}} 2^{S_i}$, wtedy $\prod L_i \underset{\alpha}{\overset{\gamma}{\rightleftarrows}} 2^{\prod S_i}$

$$\gamma = \prod \gamma_i, \qquad \alpha(A) = \Big(\alpha_i(\pi_i(A))\Big)_{i \in I}$$

- Opis funkcji: $L \underset{\alpha}{\overset{\gamma}{\rightleftarrows}} C$, $f : C \to C$

  (uwaga: jeśli $\varphi : S \to S$ oraz $C = 2^S$, to interesuje nas $f = \vec{\varphi}$)
  - $f_* : L \to L$ „dobrze modeluje” f, jeśli

$$\gamma(p) \supseteq f(\gamma(q)) \Leftrightarrow p \sqsupseteq f_*(q)$$

  - Rozwiązanie: $f_* = \alpha \circ f \circ \gamma$

Abstrakcja wyższego poziomu

- Opis krotek stanów: $L_i \underset{\alpha_i}{\overset{\gamma_i}{\rightleftarrows}} 2^{S_i}$, wtedy $\prod L_i \underset{\alpha}{\overset{\gamma}{\rightleftarrows}} 2^{\prod S_i}$

$$\gamma = \prod \gamma_i, \qquad \alpha(A) = \Big(\alpha_i(\pi_i(A))\Big)_{i \in I}$$

- Opis funkcji: $L \underset{\alpha}{\overset{\gamma}{\rightleftarrows}} C$, $f : C \to C$

  (uwaga: jeśli $\varphi : S \to S$ oraz $C = 2^S$, to interesuje nas $f = \vec{\varphi}$)
  - $f_* : L \to L$ „dobrze modeluje” f, jeśli

$$\gamma(p) \supseteq f(\gamma(q)) \Leftrightarrow p \sqsupseteq f_*(q)$$

  - Rozwiązanie: $f_* = \alpha \circ f \circ \gamma$

Abstrakcja wyższego poziomu

- Opis krotek stanów: $L_i \underset{\alpha_i}{\overset{\gamma_i}{\rightleftarrows}} 2^{S_i}$, wtedy $\prod L_i \underset{\alpha}{\overset{\gamma}{\rightleftarrows}} 2^{\prod S_i}$

$$\gamma = \prod \gamma_i, \qquad \alpha(A) = \Big(\alpha_i(\pi_i(A))\Big)_{i \in I}$$

- Opis funkcji: $L \underset{\alpha}{\overset{\gamma}{\rightleftarrows}} C$, $f : C \to C$
(uwaga: jeśli $\varphi : S \to S$ oraz $C = 2^S$, to interesuje nas $f = \vec{\varphi}$)
  - $f_* : L \to L$ „dobrze modeluje” f, jeśli

$$\gamma(p) \supseteq f(\gamma(q)) \Leftrightarrow p \sqsupseteq f_*(q)$$

  - Rozwiązanie: $f_* = \alpha \circ f \circ \gamma$

Abstrakcja wyższego poziomu

- Opis krotek stanów: $L_i \underset{\alpha_i}{\overset{\gamma_i}{\rightleftarrows}} 2^{S_i}$, wtedy $\prod L_i \underset{\alpha}{\overset{\gamma}{\rightleftarrows}} 2^{\prod S_i}$

$$\gamma = \prod \gamma_i, \qquad \alpha(A) = \Big(\alpha_i(\pi_i(A))\Big)_{i \in I}$$

- Opis funkcji: $L \underset{\alpha}{\overset{\gamma}{\rightleftarrows}} C$, $f : C \to C$
  (uwaga: jeśli $\varphi : S \to S$ oraz $C = 2^S$, to interesuje nas $f = \vec{\varphi}$)
  - $f_* : L \to L$ „dobrze modeluje” f, jeśli

$$\gamma(p) \supseteq f(\gamma(q)) \Leftrightarrow p \sqsupseteq f_*(q)$$

- Rozwiązanie: $f_* = \alpha \circ f \circ \gamma$

Abstrakcja wyższego poziomu

- Opis krotek stanów: $L_i \underset{\alpha_i}{\overset{\gamma_i}{\rightleftarrows}} 2^{S_i}$, wtedy $\prod L_i \underset{\alpha}{\overset{\gamma}{\rightleftarrows}} 2^{\prod S_i}$

$$\gamma = \prod \gamma_i, \qquad \alpha(A) = \Big(\alpha_i(\pi_i(A))\Big)_{i \in I}$$

- Opis funkcji: $L \underset{\alpha}{\overset{\gamma}{\rightleftarrows}} C,\ f : C \to C$
  (uwaga: jeśli $\varphi : S \to S$ oraz $C = 2^S$, to interesuje nas $f = \vec{\varphi}$)
  - $f_* : L \to L$ „dobrze modeluje” f, jeśli

$$\gamma(p) \supseteq f(\gamma(q)) \Leftrightarrow p \sqsupseteq f_*(q)$$

  - Rozwiązanie: $f_* = \alpha \circ f \circ \gamma$

W praktyce...

- Język: zmienne całkowite ($x \in X$), operacje arytmetyczne, przypisania
- Stany: $v \in V := X \to \overline{\mathbb{Z}} = \overline{\mathbb{Z}}^X$, model: $i \in \mathbb{I}^X$
- Konkretyzacja:

$$\gamma(i)(x) = \gamma(i(x)) = i(x), \qquad \alpha(A)(x) = \{v(x) : v \in A\}$$

- Abstrakcja operacji:

$$f_*(i_1, i_2) = \alpha(f((\gamma \times \gamma)(i_1, i_2)))$$

$$[a, b] +_* [c, d] = \vec{+}([a, b], [c, d]) = [a + c, b + d]$$

$$[a, b] \cup_* [c, d] = \alpha([a, b] \cup [c, d]) = [a \wedge c, b \vee d] \neq [a, b] \cup [c, d]$$

W praktyce...

- Język: zmienne całkowite ($x \in X$), operacje arytmetyczne, przypisania
- Stany: $v \in V := X \to \overline{\mathbb{Z}} = \overline{\mathbb{Z}}^X$, model: $i \in \mathbb{I}^X$
- Konkretyzacja:

$$\gamma(i)(x) = \gamma(i(x)) = i(x), \qquad \alpha(A)(x) = \{v(x) : v \in A\}$$

- Abstrakcja operacji:

$$f_*(i_1, i_2) = \alpha(f((\gamma \times \gamma)(i_1, i_2)))$$

$$[a, b] +_* [c, d] = \vec{+}([a, b], [c, d]) = [a + c, b + d]$$

$$[a, b] \cup_* [c, d] = \alpha([a, b] \cup [c, d]) = [a \wedge c, b \vee d] \neq [a, b] \cup [c, d]$$

W praktyce...

- Język: zmienne całkowite ($x \in X$), operacje arytmetyczne, przypisania
- Stany: $v \in V := X \to \overline{\mathbb{Z}} = \overline{\mathbb{Z}}^X$, model: $i \in \mathbb{I}^X$
- Konkretyzacja:

$$\gamma(i)(x) = \gamma(i(x)) = i(x), \qquad \alpha(A)(x) = \{v(x) : v \in A\}$$

- Abstrakcja operacji:

$$f_*(i_1, i_2) = \alpha(f((\gamma \times \gamma)(i_1, i_2)))$$

$$[a, b] +_* [c, d] = \vec{+}([a, b], [c, d]) = [a + c, b + d]$$

$$[a, b] \cup_* [c, d] = \alpha([a, b] \cup [c, d]) = [a \wedge c, b \vee d] \neq [a, b] \cup [c, d]$$

W praktyce...

- Język: zmienne całkowite ($x \in X$), operacje arytmetyczne, przypisania
- Stany: $v \in V := X \to \overline{\mathbb{Z}} = \overline{\mathbb{Z}}^X$, model: $i \in \mathbb{I}^X$
- Konkretyzacja:

$$\gamma(i)(x) = \gamma(i(x)) = i(x), \qquad \alpha(A)(x) = \{v(x) : v \in A\}$$

- Abstrakcja operacji:

$$f_*(i_1, i_2) = \alpha(f((\gamma \times \gamma)(i_1, i_2)))$$

$$[a, b] +_* [c, d] = \vec{+}([a, b], [c, d]) = [a + c, b + d]$$

$$[a, b] \cup_* [c, d] = \alpha([a, b] \cup [c, d]) = [a \wedge c, b \vee d] \neq [a, b] \cup [c, d]$$

W praktyce...

- Język: zmienne całkowite ($x \in X$), operacje arytmetyczne, przypisania
- Stany: $v \in V := X \to \overline{\mathbb{Z}} = \overline{\mathbb{Z}}^X$, model: $i \in \mathbb{I}^X$
- Konkretyzacja:

$$\gamma(i)(x) = \gamma(i(x)) = i(x), \qquad \alpha(A)(x) = \{v(x) : v \in A\}$$

- Abstrakcja operacji:

$$f_*(i_1, i_2) = \alpha(f((\gamma \times \gamma)(i_1, i_2)))$$

$$[a, b] +_* [c, d] = \vec{+}([a, b], [c, d]) = [a + c, b + d]$$

$$[a, b] \cup_* [c, d] = \alpha([a, b] \cup [c, d]) = [a \wedge c, b \vee d] \neq [a, b] \cup [c, d]$$

W praktyce...

- Język: zmienne całkowite ($x \in X$), operacje arytmetyczne, przypisania
- Stany: $v \in V := X \to \overline{\mathbb{Z}} = \overline{\mathbb{Z}}^X$, model: $i \in \mathbb{I}^X$
- Konkretyzacja:

$$\gamma(i)(x) = \gamma(i(x)) = i(x), \qquad \alpha(A)(x) = \{v(x) : v \in A\}$$

- Abstrakcja operacji:

$$f_*(i_1, i_2) = \alpha(f((\gamma \times \gamma)(i_1, i_2)))$$

$$[a, b] +_* [c, d] = \vec{+}([a, b], [c, d]) = [a + c, b + d]$$

$$[a, b] \cup_* [c, d] = \alpha([a, b] \cup [c, d]) = [a \wedge c, b \vee d] \neq [a, b] \cup [c, d]$$

Punkty stałe

- Model: automat z lokacjami, warunki na stan oraz akcje
- $P(l)$ - zbiór możliwych stanów w lokacji l
- L_0 - zbiór stanów początkowych
- Zbiory $P(l)$ spełniają (dla $l \neq L_0$)

$$P(l) = \bigcup_{l' \to l} A_{l',l}\Big(P(l') \cap C_{l',l}\Big)$$

- Jeśli $P(l) \leq \gamma(p_l)$ dla $l \in L_0$, to $P(l)$ szacuje się przez najmniejsze rozwiązanie układu równań:

$$x_l = p_l \qquad \text{dla } l \in L_0,$$

$$x_l = \bigsqcup (A_{l',l})_* \Big(x_{l'} \sqcap \alpha(C_{l,l'})\Big)$$

Punkty stałe

- Model: automat z lokacjami, warunki na stan oraz akcje
- $P(l)$ - zbiór możliwych stanów w lokacji l
- L_0 - zbiór stanów początkowych
- Zbiory $P(l)$ spełniają (dla $l \neq L_0$)

$$P(l) = \bigcup_{l' \to l} A_{l',l}\Big(P(l') \cap C_{l',l}\Big)$$

- Jeśli $P(l) \leq \gamma(p_l)$ dla $l \in L_0$, to $P(l)$ szacuje się przez najmniejsze rozwiązanie układu równań:

$$x_l = p_l \qquad \text{dla } l \in L_0,$$

$$x_l = \bigsqcup (A_{l',l})_* \Big(x_{l'} \sqcap \alpha(C_{l,l'})\Big)$$

Punkty stałe

- Model: automat z lokacjami, warunki na stan oraz akcje
- $P(l)$ - zbiór możliwych stanów w lokacji l
- L_0 - zbiór stanów początkowych
- Zbiory $P(l)$ spełniają (dla $l \neq L_0$)

$$P(l) = \bigcup_{l' \to l} A_{l',l}\Big(P(l') \cap C_{l',l}\Big)$$

- Jeśli $P(l) \leq \gamma(p_l)$ dla $l \in L_0$, to $P(l)$ szacuje się przez najmniejsze rozwiązanie układu równań:

$$x_l = p_l \qquad \text{dla } l \in L_0,$$

$$x_l = \bigsqcup (A_{l',l})_* \Big(x_{l'} \sqcap \alpha(C_{l,l'})\Big)$$

Plan

Konstruktywne Twierdzenie Tarskiego

Twierdzenie (KTT): Niech $(X, \leq)$ - krata zupełna oraz $f : X \to X$ - monotoniczna.
Wówczas najmniejszym punktem stałym f jest

$$L_f = \inf\{x \in X \ : \ f(x) \leq x\}.$$

Dowód:

- Niech $A = \{x \in X \ : \ f(x) \leq x\}$.
- Punkty stałe f są w A $\quad \Rightarrow \quad$ jeśli L_f stały, to najmniejszy
- Dla każdego $a \in A$ mamy $f(L_f) \leq f(a) \leq a$, więc $f(L_f) \leq L_f$. Czyli $L_f \in A$. Czyli $L_f = \min A$. Mamy:

$$A \ni f(L_f) \leq L_f = \min A \quad \Rightarrow \quad f(L_f) = L_f.$$

Konstruktywne Twierdzenie Tarskiego

Twierdzenie (KTT): Niech $(X, \leq)$ - krata zupełna oraz $f : X \to X$ - monotoniczna.
Wówczas najmniejszym punktem stałym f jest

$$L_f = \inf\{x \in X \ : \ f(x) \leq x\}.$$

Dowód:

- Niech $A = \{x \in X \ : \ f(x) \leq x\}$.
- Punkty stałe f są w A $\quad \Rightarrow \quad$ jeśli L_f stały, to najmniejszy
- Dla każdego $a \in A$ mamy $f(L_f) \leq f(a) \leq a$, więc $f(L_f) \leq L_f$. Czyli $L_f \in A$. Czyli $L_f = \min A$. Mamy:

$$A \ni f(L_f) \leq L_f = \min A \quad \Rightarrow \quad f(L_f) = L_f.$$

Konstruktywne Twierdzenie Tarskiego

Twierdzenie (KTT): Niech $(X, \leq)$ - krata zupełna oraz $f : X \to X$ - monotoniczna.
Wówczas najmniejszym punktem stałym f jest

$$L_f = \inf\{x \in X \;:\; f(x) \leq x\}.$$

Dowód:

- Niech $A = \{x \in X \;:\; f(x) \leq x\}$.
- Punkty stałe f są w A $\quad\Rightarrow\quad$ jeśli L_f stały, to najmniejszy
- Dla każdego $a \in A$ mamy $f(L_f) \leq f(a) \leq a$, więc $f(L_f) \leq L_f$.
  Czyli $L_f \in A$. Czyli $L_f = \min A$. Mamy:

$$A \ni f(L_f) \leq L_f = \min A \quad\Rightarrow\quad f(L_f) = L_f.$$

Konstruktywne Twierdzenie Tarskiego

Twierdzenie (KTT): Niech $(X, \leq)$ - krata zupełna oraz $f : X \to X$ - monotoniczna.
Wówczas najmniejszym punktem stałym f jest

$$L_f = \inf\{x \in X \ : \ f(x) \leq x\}.$$

Dowód:

- Niech $A = \{x \in X \ : \ f(x) \leq x\}$.
- Punkty stałe f są w A $\quad \Rightarrow \quad$ jeśli L_f stały, to najmniejszy
- Dla każdego $a \in A$ mamy $f(L_f) \leq f(a) \leq a$, więc $f(L_f) \leq L_f$. Czyli $L_f \in A$. Czyli $L_f = \min A$. Mamy:

$$A \ni f(L_f) \leq L_f = \min A \quad \Rightarrow \quad f(L_f) = L_f.$$

Egzystencjalne Twierdzenie Tarskiego

Twierdzenie (KTT): Niech $(X, \leq)$ - krata zupełna oraz $f : X \to X$ - monotoniczna.
Wówczas najmniejszym punktem stałym f jest

$$L_f = \inf\{x \in X \ : \ f(x) \leq x\}.$$

Wniosek (ETT): Niech $(X, \leq)$, f - j. w., $f(x_0) \leq x_0$.
Wówczas f ma punkt stały $\leq x_0$.

Dowód: KTT dla kraty $Y = \{x \in X \ : \ x \leq x_0\}$, bo $f(Y) \subseteq Y$.

Uwaga: Twierdzenia działają też dualnie

Egzystencjalne Twierdzenie Tarskiego

Twierdzenie (KTT): Niech $(X, \leq)$ - krata zupełna oraz $f : X \to X$ - monotoniczna.
Wówczas najmniejszym punktem stałym f jest

$$L_f = \inf\{x \in X \ : \ f(x) \leq x\}.$$

Wniosek (ETT): Niech $(X, \leq)$, f - j. w., $f(x_0) \leq x_0$.
Wówczas f ma punkt stały $\leq x_0$.

Dowód: KTT dla kraty $Y = \{x \in X \ : \ x \leq x_0\}$, bo $f(Y) \subseteq Y$.

Uwaga: Twierdzenia działają też dualnie

Egzystencjalne Twierdzenie Tarskiego

Twierdzenie (KTT): Niech $(X, \leq)$ - krata zupełna oraz $f : X \to X$ - monotoniczna.
Wówczas najmniejszym punktem stałym f jest

$$L_f = \inf\{x \in X \;:\; f(x) \leq x\}.$$

Wniosek (ETT): Niech $(X, \leq)$, f - j. w., $f(x_0) \leq x_0$.
Wówczas f ma punkt stały $\leq x_0$.

Dowód: KTT dla kraty $Y = \{x \in X \;:\; x \leq x_0\}$, bo $f(Y) \subseteq Y$.

Uwaga: Twierdzenia działają też dualnie

Język liczb naturalnych

- Rozważamy następujące wyrażenia nad $\mathbb{Z}$:

$$e ::= n \mid x \mid e + e \mid p \cdot e \mid e \vee e \mid e \wedge e,$$

  gdzie $p > 0$.
- Wszystkie funkcje w sygnaturze są monotoniczne względem obu argumentów
  ... oraz ciągłe
- Rozwiązujemy układ równań postaci $x_i = e_i$, e_i - wyrażenie zależne od $x_1, \ldots, x_n$
- Zapis wektorowo-funkcyjny: $\vec{x} = E(\vec{x})$
- Szukamy *najmniejszego* punktu stałego

Język liczb naturalnych

- Rozważamy następujące wyrażenia nad $\overline{\mathbb{Z}}$:

$$e ::= n \mid x \mid e + e \mid p \cdot e \mid e \vee e \mid e \wedge e,$$

  gdzie $p > 0$.
- Wszystkie funkcje w sygnaturze są monotoniczne względem obu argumentów
  ... oraz ciągłe
- Rozwiązujemy układ równań postaci $x_i = e_i$, e_i - wyrażenie zależne od $x_1, \ldots, x_n$
- Zapis wektorowo-funkcyjny: $\vec{x} = E(\vec{x})$
- Szukamy *najmniejszego* punktu stałego

Język liczb naturalnych

- Rozważamy następujące wyrażenia nad $\overline{\mathbb{Z}}$:

$$e ::= n \mid x \mid e + e \mid p \cdot e \mid e \vee e \mid e \wedge e,$$

  gdzie $p > 0$.
- Wszystkie funkcje w sygnaturze są monotoniczne względem obu argumentów
  ... oraz ciągłe
- Rozwiązujemy układ równań postaci $x_i = e_i$, e_i - wyrażenie zależne od $x_1, \ldots, x_n$
- Zapis wektorowo-funkcyjny: $\vec{x} = E(\vec{x})$
- Szukamy *najmniejszego* punktu stałego

Język liczb naturalnych

- Rozważamy następujące wyrażenia nad $\overline{\mathbb{Z}}$:

  $$e ::= n \mid x \mid e + e \mid p \cdot e \mid e \vee e \mid e \wedge e,$$

  gdzie $p > 0$.
- Wszystkie funkcje w sygnaturze są monotoniczne względem obu argumentów
  ... oraz ciągłe
- Rozwiązujemy układ równań postaci $x_i = e_i$,
  e_i - wyrażenie zależne od $x_1, \ldots, x_n$
- Zapis wektorowo-funkcyjny: $\vec{x} = E(\vec{x})$
- Szukamy *najmniejszego* punktu stałego

Język liczb naturalnych

- Rozważamy następujące wyrażenia nad $\overline{\mathbb{Z}}$:

  $$e ::= n \mid x \mid e + e \mid p \cdot e \mid e \vee e \mid e \wedge e,$$

  gdzie $p > 0$.
- Wszystkie funkcje w sygnaturze są monotoniczne względem obu argumentów
  ... oraz ciągłe
- Rozwiązujemy układ równań postaci $x_i = e_i$,
  e_i - wyrażenie zależne od $x_1, \ldots, x_n$
- Zapis wektorowo-funkcyjny: $\vec{x} = E(\vec{x})$
- Szukamy *najmniejszego* punktu stałego

Język liczb naturalnych

- Rozważamy następujące wyrażenia nad $\overline{\mathbb{Z}}$:

$$e ::= n \mid x \mid e + e \mid p \cdot e \mid e \vee e \mid e \wedge e,$$

  gdzie $p > 0$.
- Wszystkie funkcje w sygnaturze są monotoniczne względem obu argumentów
  ... oraz ciągłe
- Rozwiązujemy układ równań postaci $x_i = e_i$,
  e_i - wyrażenie zależne od $x_1, \ldots, x_n$
- Zapis wektorowo-funkcyjny: $\vec{x} = E(\vec{x})$
- Szukamy *najmniejszego* punktu stałego

Poprawianie strategii

- Problem: funkcje zawierające $\vee$ oraz $\wedge$ są skomplikowane.
- Rozwiązanie: pozbywamy się $\vee$ — jak?
- *Strategia* π — przypisanie każdemu $\vee$ jednego z podwyrażeń
- E_π - funkcja obliczająca wyrażenie przy strategii π

Poprawianie strategii

- Problem: funkcje zawierające $\vee$ oraz $\wedge$ są skomplikowane.
- Rozwiązanie: pozbywamy się $\vee$ — jak?
- *Strategia* π — przypisanie każdemu $\vee$ jednego z podwyrażeń
- E_π - funkcja obliczająca wyrażenie przy strategii π

Poprawianie strategii

Niech x - najmniejszy punkt stały dla E.
Niech $y \leq x$ - przybliżenie z dołu.

- Jeśli y jest stały dla E, to $y = x$ (**koniec**)
- Wpp zachodzi $E(y) > y$.
- π := dobry wybór gałęzi *przy wartościowaniu y*
- Teraz:
  - $y < E(y) = E_\pi(y)$,
    więc istnieje punkt stały dla E_π większy niż y (ETT)
  - Niech x_π - najmniejszy taki. Z KTT:
    $$x_\pi = \inf\{a \geq y \ : \ E_\pi(a) \leq a\}$$
  - $x \geq y$ oraz $x = E(x) \geq E_\pi(x)$, więc $x \geq x_\pi$
- **Wniosek:** $y < x_\pi \leq x$ - mamy lepsze przybliżenie z dołu

Poprawianie strategii

Niech x - najmniejszy punkt stały dla E.
Niech $y \leq x$ - przybliżenie z dołu.

- Jeśli y jest stały dla E, to $y = x$ (**koniec**)
- Wpp zachodzi $E(y) > y$.
- π := dobry wybór gałęzi *przy wartościowaniu y*
- Teraz:
  - $y < E(y) = E_\pi(y)$,
    więc istnieje punkt stały dla E_π większy niż y (ETT)
  - Niech x_π - najmniejszy taki. Z KTT:
    $$x_\pi = \inf\{a \geq y \ : \ E_\pi(a) \leq a\}$$
  - $x \geq y$ oraz $x = E(x) \geq E_\pi(x)$, więc $x \geq x_\pi$
- **Wniosek:** $y < x_\pi \leq x$ - mamy lepsze przybliżenie z dołu

Poprawianie strategii

Niech x - najmniejszy punkt stały dla E.
Niech $y \leq x$ - przybliżenie z dołu.

- Jeśli y jest stały dla E, to $y = x$ (**koniec**)
- Wpp zachodzi $E(y) > y$.
- π := dobry wybór gałęzi *przy wartościowaniu y*
- Teraz:
  - $y < E(y) = E_\pi(y)$,
    więc istnieje punkt stały dla E_π większy niż y (ETT)
  - Niech x_π - najmniejszy taki. Z KTT:
    $$x_\pi = \inf\{a \geq y \;:\; E_\pi(a) \leq a\}$$
  - $x \geq y$ oraz $x = E(x) \geq E_\pi(x)$, więc $x \geq x_\pi$
- **Wniosek:** $y < x_\pi \leq x$ - mamy lepsze przybliżenie z dołu

Poprawianie strategii

Niech x - najmniejszy punkt stały dla E.
Niech $y \leq x$ - przybliżenie z dołu.

- Jeśli y jest stały dla E, to $y = x$ (**koniec**)
- Wpp zachodzi $E(y) > y$.
- π := dobry wybór gałęzi *przy wartościowaniu y*
- Teraz:
  - $y < E(y) = E_\pi(y)$,
    więc istnieje punkt stały dla E_π większy niż y (ETT)
  - Niech x_π - najmniejszy taki. Z KTT:
    $$x_\pi = \inf\{a \geq y \ : \ E_\pi(a) \leq a\}$$
  - $x \geq y$ oraz $x = E(x) \geq E_\pi(x)$, więc $x \geq x_\pi$
- **Wniosek:** $y < x_\pi \leq x$ - mamy lepsze przybliżenie z dołu

Poprawianie strategii

Niech x - najmniejszy punkt stały dla E.
Niech $y \leq x$ - przybliżenie z dołu.

- Jeśli y jest stały dla E, to $y = x$ (**koniec**)
- Wpp zachodzi $E(y) > y$.
- π := dobry wybór gałęzi *przy wartościowaniu y*
- Teraz:
  - $y < E(y) = E_\pi(y)$,
    więc istnieje punkt stały dla E_π większy niż y (ETT)
  - Niech x_π - najmniejszy taki. Z KTT:
    $$x_\pi = \inf\{a \geq y \ : \ E_\pi(a) \leq a\}$$
  - $x \geq y$ oraz $x = E(x) \geq E_\pi(x)$, więc $x \geq x_\pi$
- **Wniosek:** $y < x_\pi \leq x$ - mamy lepsze przybliżenie z dołu

Poprawianie strategii

Niech x - najmniejszy punkt stały dla E.
Niech $y \leq x$ - przybliżenie z dołu.

- Jeśli y jest stały dla E, to $y = x$ (**koniec**)
- Wpp zachodzi $E(y) > y$.
- π := dobry wybór gałęzi *przy wartościowaniu y*
- Teraz:
  - $y < E(y) = E_\pi(y)$,
    więc istnieje punkt stały dla E_π większy niż y (ETT)
  - Niech x_π - najmniejszy taki. Z KTT:
    $$x_\pi = \inf\{a \geq y \ : \ E_\pi(a) \leq a\}$$
  - $x \geq y$ oraz $x = E(x) \geq E_\pi(x)$, więc $x \geq x_\pi$
- **Wniosek:** $y < x_\pi \leq x$ - mamy lepsze przybliżenie z dołu

Punkty stałe dla równań koniunkcyjnych

- Równania *koniunkcyjne* - bez $\vee$
- Z przemienności/rozdzielności: minimum rodziny wyrażeń arytm.
- Funkcja E jest wklęsła
- Skończone punkty stałe - brzeg zbioru wypukłego
- Ile punktów stałych?
  - $n = 1 \longrightarrow \leq 3$, albo półprosta
  - $n > 1 \longrightarrow ?$

Punkty stałe dla równań koniunkcyjnych

- Równania *koniunkcyjne* - bez $\vee$
- Z przemienności/rozdzielności: minimum rodziny wyrażeń arytm.
- Funkcja E jest wklęsła
- Skończone punkty stałe - brzeg zbioru wypukłego
- Ile punktów stałych?
  - $n = 1 \longrightarrow \leq 3$, albo półprosta
  - $n > 1 \longrightarrow ?$

Punkty stałe dla równań koniunkcyjnych

- Równania *koniunkcyjne* - bez $\vee$
- Z przemienności/rozdzielności: minimum rodziny wyrażeń arytm.
- Funkcja E jest wklęsła
- Skończone punkty stałe - brzeg zbioru wypukłego
- Ile punktów stałych?
  - $n = 1 \longrightarrow \leq 3$, albo półprosta
  - $n > 1 \longrightarrow ?$

Punkty stałe dla równań koniunkcyjnych

- Równania *koniunkcyjne* - bez $\vee$
- Z przemienności/rozdzielności: minimum rodziny wyrażeń arytm.
- Funkcja E jest wklęsła
- Skończone punkty stałe - brzeg zbioru wypukłego
- Ile punktów stałych?
  - $n = 1 \longrightarrow \leq 3$, albo półprosta
  - $n > 1 \longrightarrow ?$

Uogólniony algorytm Bellmana-Forda

Oblicza największy punkt stały wyrażenia koniunktywnego E.

- Zacznij od $const_{\infty}$
- n-krotnie: przypisz *po kolei* $x_i := E_i(\vec{x})$
- n-krotnie: wykonaj *po kolei*:
  jeśli $x_i \neq E_i(\vec{x})$, przypisz $x_i := -\infty$

Dowód poprawności: [3]

Uogólniony algorytm Bellmana-Forda

Oblicza największy punkt stały wyrażenia koniunktywnego E.

- Zacznij od $const_\infty$
- n-krotnie: przypisz *po kolei* $x_i := E_i(\vec{x})$
- n-krotnie: wykonaj *po kolei*:
  jeśli $x_i \neq E_i(\vec{x})$, przypisz $x_i := -\infty$

Dowód poprawności: [3]

Uogólniony algorytm Bellmana-Forda

Oblicza największy punkt stały wyrażenia koniunktywnego E.

- Zacznij od $const_\infty$
- n-krotnie: przypisz *po kolei* $x_i := E_i(\vec{x})$
- n-krotnie: wykonaj *po kolei*:
  jeśli $x_i \neq E_i(\vec{x})$, przypisz $x_i := -\infty$

Dowód poprawności: [3]

Uogólniony algorytm Bellmana-Forda

Oblicza największy punkt stały wyrażenia koniunktywnego E.

- Zacznij od $const_\infty$
- n-krotnie: przypisz *po kolei* $x_i := E_i(\vec{x})$
- n-krotnie: wykonaj *po kolei*:
  jeśli $x_i \neq E_i(\vec{x})$, przypisz $x_i := -\infty$

Dowód poprawności: [3]

Problemy

Problemy:

- BF szuka największych p. st. zamiast najmniejszych
- Możliwość rozważania tej samej strategii wielokrotnie

Rozwiązanie:

- Zmodyfikować równanie tak, by usunąć część p. st.
- . . . ale najmniejszy punkt stały ma być zachowany

Problemy

Problemy:

- BF szuka największych p. st. zamiast najmniejszych
- Możliwość rozważania tej samej strategii wielokrotnie

Rozwiązanie:

- Zmodyfikować równanie tak, by usunąć część p. st.
- . . . ale najmniejszy punkt stały ma być zachowany

Wzbogacanie

- Liczba całkowita otrzymuje *punkty karne głębokości*
- Nowy porządek: $\tilde{\mathbb{Z}} = \left((\mathbb{Z} \times \mathbb{N}) \cup \{-\infty, \infty\}, \leq_{lex} \right)$, przy czym w $\mathbb{N}$ odwracamy porządek.
  Parę (n, k) oznaczymy też jako $n_{(k)}$
- Działania:
  - $\vee, \wedge$ - wg nowego porządku
  - $m_{(a)} + n_{(b)} = m + n_{(a \vee b)}$
  - $c \cdot n_{(a)} = cn_{(a)}$
  - Nowość: $\mathrm{inc}(n_{(k)}) = n_{(k+1)}$

Wzbogacanie

- Liczba całkowita otrzymuje *punkty karne głębokości*
- Nowy porządek: $\tilde{\mathbb{Z}} = \left((\mathbb{Z} \times \mathbb{N}) \cup \{-\infty, \infty\}, \leq_{lex} \right)$, przy czym w $\mathbb{N}$ odwracamy porządek.
  Parę (n, k) oznaczymy też jako $n_{(k)}$
- Działania:
  - $\vee, \wedge$ - wg nowego porządku
  - $m_{(a)} + n_{(b)} = m + n_{(a \vee b)}$
  - $c \cdot n_{(a)} = cn_{(a)}$
  - Nowość: $\mathrm{inc}(n_{(k)}) = n_{(k+1)}$

Wzbogacanie

- Liczba całkowita otrzymuje *punkty karne głębokości*
- Nowy porządek: $\tilde{\mathbb{Z}} = \left((\mathbb{Z} \times \mathbb{N}) \cup \{-\infty, \infty\}, \leq_{lex}\right)$, przy czym w $\mathbb{N}$ odwracamy porządek.
  Parę (n, k) oznaczymy też jako $n_{(k)}$
- Działania:
  - $\vee, \wedge$ - wg nowego porządku
  - $m_{(a)} + n_{(b)} = m + n_{(a \vee b)}$
  - $c \cdot n_{(a)} = cn_{(a)}$
  - Nowość: $\mathrm{inc}(n_{(k)}) = n_{(k+1)}$

Wzbogacanie

- Liczba całkowita otrzymuje *punkty karne głębokości*
- Nowy porządek: $\tilde{\mathbb{Z}} = \Big((\mathbb{Z} \times \mathbb{N}) \cup \{-\infty, \infty\}, \leq_{lex} \Big)$, przy czym w $\mathbb{N}$ odwracamy porządek.
  Parę (n, k) oznaczymy też jako $n_{(k)}$
- Działania:
  - $\vee, \wedge$ - wg nowego porządku
  - $m_{(a)} + n_{(b)} = m + n_{(a \vee b)}$
  - $c \cdot n_{(a)} = cn_{(a)}$
  - Nowość: $\mathrm{inc}(n_{(k)}) = n_{(k+1)}$

Wzbogacanie

- Liczba całkowita otrzymuje *punkty karne głębokości*
- Nowy porządek: $\tilde{\mathbb{Z}} = \Big((\mathbb{Z} \times \mathbb{N}) \cup \{-\infty, \infty\}, \leq_{lex} \Big)$, przy czym w $\mathbb{N}$ odwracamy porządek. Parę (n, k) oznaczymy też jako $n_{(k)}$
- Działania:
    - $\vee, \wedge$ - wg nowego porządku
    - $m_{(a)} + n_{(b)} = m + n_{(a \vee b)}$
    - $c \cdot n_{(a)} = cn_{(a)}$
    - Nowość: $\mathrm{inc}(n_{(k)}) = n_{(k+1)}$

Wzbogacanie równań

- Zmieniamy E na E^*:
  - Każdą stałą n na $n_{(0)}$
  - Każde wystąpienie zmiennej x na $\mathrm{inc}(x)$
- Przykład: $x = 2 \wedge 2x$ (punkty stałe: $-\infty, 0, 2$)
  - Nowe równanie: $x = 2_{(0)} \wedge 2_{(0)} \cdot \mathrm{inc}(x)$
  - Nowe punkty stałe: $-\infty, 2_{(0)}$
- Własności:
  - Punkty stałe wzbogacone rzutują się na zwykłe
  - Wzbogacone równanie ma *co najwyżej* jeden *duży* p. st. (czyli taki, który na żadnej współrzędnej nie ma $-\infty$)
  - Pewne wzbogacenie najmn. rozw. E jest rozwiązaniem E^* (dowód: ?)

Wzbogacanie równań

- Zmieniamy E na E^*:
  - Każdą stałą n na $n_{(0)}$
  - Każde wystąpienie zmiennej x na $\mathrm{inc}(x)$
- Przykład: $x = 2 \wedge 2x$ (punkty stałe: $-\infty, 0, 2$)
  - Nowe równanie: $x = 2_{(0)} \wedge 2_{(0)} \cdot \mathrm{inc}(x)$
  - Nowe punkty stałe: $-\infty, 2_{(0)}$
- Własności:
  - Punkty stałe wzbogacone rzutują się na zwykłe
  - Wzbogacone równanie ma *co najwyżej* jeden *duży* p. st. (czyli taki, który na żadnej współrzędnej nie ma $-\infty$)
  - Pewne wzbogacenie najmn. rozw. E jest rozwiązaniem E^* (dowód: ?)

Wzbogacanie równań

- Zmieniamy E na E^*:
  - Każdą stałą n na $n_{(0)}$
  - Każde wystąpienie zmiennej x na $\mathrm{inc}(x)$
- Przykład: $x = 2 \wedge 2x$ (punkty stałe: $-\infty, 0, 2$)
  - Nowe równanie: $x = 2_{(0)} \wedge 2_{(0)} \cdot \mathrm{inc}(x)$
  - Nowe punkty stałe: $-\infty, 2_{(0)}$
- Własności:
  - Punkty stałe wzbogacone rzutują się na zwykłe
  - Wzbogacone równanie ma *co najwyżej* jeden *duży* p. st. (czyli taki, który na żadnej współrzędnej nie ma $-\infty$)
  - Pewne wzbogacenie najmn. rozw. E jest rozwiązaniem E^* (dowód: ?)

Wzbogacanie równań

- Zmieniamy E na E^*:
  - Każdą stałą n na $n_{(0)}$
  - Każde wystąpienie zmiennej x na $\mathrm{inc}(x)$
- Przykład: $x = 2 \wedge 2x$ (punkty stałe: $-\infty, 0, 2$)
  - Nowe równanie: $x = 2_{(0)} \wedge 2_{(0)} \cdot \mathrm{inc}(x)$
  - Nowe punkty stałe: $-\infty, 2_{(0)}$
- Własności:
  - Punkty stałe wzbogacone rzutują się na zwykłe
  - Wzbogacone równanie ma *co najwyżej* jeden *duży* p. st. (czyli taki, który na żadnej współrzędnej nie ma $-\infty$)
  - Pewne wzbogacenie najmn. rozw. E jest rozwiązaniem E^* (dowód: ?)

Wzbogacanie równań

- Zmieniamy E na E^*:
  - Każdą stałą n na $n_{(0)}$
  - Każde wystąpienie zmiennej x na $\mathrm{inc}(x)$
- Przykład: $x = 2 \wedge 2x$ (punkty stałe: $-\infty, 0, 2$)
  - Nowe równanie: $x = 2_{(0)} \wedge 2_{(0)} \cdot \mathrm{inc}(x)$
  - Nowe punkty stałe: $-\infty, 2_{(0)}$
- Własności:
  - Punkty stałe wzbogacone rzutują się na zwykłe
  - Wzbogacone równanie ma *co najwyżej* jeden *duży* p. st. (czyli taki, który na żadnej współrzędnej nie ma $-\infty$)
  - Pewne wzbogacenie najmn. rozw. E jest rozwiązaniem E^* (dowód: ?)

Wzbogacanie równań

- Zmieniamy E na E^*:
  - Każdą stałą n na $n_{(0)}$
  - Każde wystąpienie zmiennej x na $\mathrm{inc}(x)$
- Przykład: $x = 2 \wedge 2x$ (punkty stałe: $-\infty, 0, 2$)
  - Nowe równanie: $x = 2_{(0)} \wedge 2_{(0)} \cdot \mathrm{inc}(x)$
  - Nowe punkty stałe: $-\infty, 2_{(0)}$
- Własności:
  - Punkty stałe wzbogacone rzutują się na zwykłe
  - Wzbogacone równanie ma *co najwyżej* jeden *duży* p. st. (czyli taki, który na żadnej współrzędnej nie ma $-\infty$)
  - Pewne wzbogacenie najmn. rozw. E jest rozwiązaniem E^* (dowód: ?)

Wzbogacanie równań

- Zmieniamy E na E^*:
  - Każdą stałą n na $n_{(0)}$
  - Każde wystąpienie zmiennej x na $\mathrm{inc}(x)$
- Przykład: $x = 2 \wedge 2x$ (punkty stałe: $-\infty, 0, 2$)
  - Nowe równanie: $x = 2_{(0)} \wedge 2_{(0)} \cdot \mathrm{inc}(x)$
  - Nowe punkty stałe: $-\infty, 2_{(0)}$
- Własności:
  - Punkty stałe wzbogacone rzutują się na zwykłe
  - Wzbogacone równanie ma *co najwyżej* jeden *duży* p. st. (czyli taki, który na żadnej współrzędnej nie ma $-\infty$)
  - Pewne wzbogacenie najmn. rozw. E jest rozwiązaniem E^* (dowód: ?)

Duże oszacowania punktu stałego

- Dane: dowolne wzbogacone równanie (niekoniecznie koniunktywne)
- Szukane: przybliżenie najmniejszego punktu stałego z dołu dużym x,
  lub informacja, że się nie da
- Metoda: pierwsze n iteracji BF, zaczynając od $const_{-\infty}$
- Fakt: jeśli gdzieś pozostanie $-\infty$, to tak już musi być (dowód: ?)
- Usuwamy zmienne równe aktualnie $-\infty$ (po prawej zastępujemy przez $-\infty$)

Duże oszacowania punktu stałego

- Dane: dowolne wzbogacone równanie (niekoniecznie koniunktywne)
- Szukane: przybliżenie najmniejszego punktu stałego z dołu dużym x,
  lub informacja, że się nie da
- Metoda: pierwsze n iteracji BF, zaczynając od $const_{-\infty}$
- Fakt: jeśli gdzieś pozostanie $-\infty$, to tak już musi być (dowód: ?)
- Usuwamy zmienne równe aktualnie $-\infty$ (po prawej zastępujemy przez $-\infty$)

Duże oszacowania punktu stałego

- Dane: dowolne wzbogacone równanie (niekoniecznie koniunktywne)
- Szukane: przybliżenie najmniejszego punktu stałego z dołu dużym x,
  lub informacja, że się nie da
- Metoda: pierwsze n iteracji BF, zaczynając od $const_{-\infty}$
- Fakt: jeśli gdzieś pozostanie $-\infty$, to tak już musi być (dowód: ?)
- Usuwamy zmienne równe aktualnie $-\infty$ (po prawej zastępujemy przez $-\infty$)

Duże oszacowania punktu stałego

- Dane: dowolne wzbogacone równanie (niekoniecznie koniunktywne)
- Szukane: przybliżenie najmniejszego punktu stałego z dołu dużym x,
  lub informacja, że się nie da
- Metoda: pierwsze n iteracji BF, zaczynając od $const_{-\infty}$
- Fakt: jeśli gdzieś pozostanie $-\infty$, to tak już musi być (dowód: ?)
- Usuwamy zmienne równe aktualnie $-\infty$ (po prawej zastępujemy przez $-\infty$)

Duże oszacowanie: przykład

- $E: \begin{cases} x &= (x+y) \vee 0 \\ y &= (x+1) \wedge 10 \end{cases}$
- $E^*: \begin{cases} x &= (\mathrm{inc}(x) + \mathrm{inc}(y)) \vee 0_{(0)} \\ y &= (\mathrm{inc}(x) + 1_{(0)}) \wedge 10_{(0)} \end{cases}$
- Pierwsza faza BF:
  - $x_0 = -\infty, \qquad y_0 = -\infty$
  - $x_1 = 0_{(0)}, \qquad y_1 = 1_{(1)}$
  - $x_2 = 1_{(2)}, \qquad y_2 = 2_{(3)}$
- (x_2, y_2) szacuje z dołu najmniejszy punkt stały E^*

Duże oszacowanie: przykład

- E : $\begin{cases} x &= (x+y) \vee 0 \\ y &= (x+1) \wedge 10 \end{cases}$
- E^* : $\begin{cases} x &= (\mathrm{inc}(x) + \mathrm{inc}(y)) \vee 0_{(0)} \\ y &= (\mathrm{inc}(x) + 1_{(0)}) \wedge 10_{(0)} \end{cases}$
- Pierwsza faza BF:
  - $x_0 = -\infty$, $y_0 = -\infty$
  - $x_1 = 0_{(0)}$, $y_1 = 1_{(1)}$
  - $x_2 = 1_{(2)}$, $y_2 = 2_{(3)}$
- (x_2, y_2) szacuje z dołu najmniejszy punkt stały E^*

Duże oszacowanie: przykład

- $E: \begin{cases} x &= (x+y) \vee 0 \\ y &= (x+1) \wedge 10 \end{cases}$
- $E^*: \begin{cases} x &= (\mathrm{inc}(x) + \mathrm{inc}(y)) \vee 0_{(0)} \\ y &= (\mathrm{inc}(x) + 1_{(0)}) \wedge 10_{(0)} \end{cases}$
- Pierwsza faza BF:
  - $x_0 = -\infty, \qquad y_0 = -\infty$
  - $x_1 = 0_{(0)}, \qquad y_1 = 1_{(1)}$
  - $x_2 = 1_{(2)}, \qquad y_2 = 2_{(3)}$
- (x_2, y_2) szacuje z dołu najmniejszy punkt stały E^*

Duże oszacowanie: przykład

- $E: \quad \begin{cases} x &= (x+y) \vee 0 \\ y &= (x+1) \wedge 10 \end{cases}$
- $E^*: \quad \begin{cases} x &= (\mathrm{inc}(x) + \mathrm{inc}(y)) \vee 0_{(0)} \\ y &= (\mathrm{inc}(x) + 1_{(0)}) \wedge 10_{(0)} \end{cases}$
- Pierwsza faza BF:
  - $x_0 = -\infty, \qquad y_0 = -\infty$
  - $x_1 = 0_{(0)}, \qquad y_1 = 1_{(1)}$
  - $x_2 = 1_{(2)}, \qquad y_2 = 2_{(3)}$
- (x_2, y_2) szacuje z dołu najmniejszy punkt stały E^*

Duże oszacowanie: przykład

- $E: \begin{cases} x = (x+y) \vee 0 \\ y = (x+1) \wedge 10 \end{cases}$
- $E^*: \begin{cases} x = (\mathrm{inc}(x) + \mathrm{inc}(y)) \vee 0_{(0)} \\ y = (\mathrm{inc}(x) + 1_{(0)}) \wedge 10_{(0)} \end{cases}$
- Pierwsza faza BF:
  - $x_0 = -\infty, \qquad y_0 = -\infty$
  - $x_1 = 0_{(0)}, \qquad y_1 = 1_{(1)}$
  - $x_2 = 1_{(2)}, \qquad y_2 = 2_{(3)}$
- (x_2, y_2) szacuje z dołu najmniejszy punkt stały E^*

Duże oszacowanie: przykład

- $E: \quad \begin{cases} x &= (x+y) \vee 0 \\ y &= (x+1) \wedge 10 \end{cases}$
- $E^*: \quad \begin{cases} x &= (\mathrm{inc}(x) + \mathrm{inc}(y)) \vee 0_{(0)} \\ y &= (\mathrm{inc}(x) + 1_{(0)}) \wedge 10_{(0)} \end{cases}$
- Pierwsza faza BF:
  - $x_0 = -\infty, \qquad y_0 = -\infty$
  - $x_1 = 0_{(0)}, \qquad y_1 = 1_{(1)}$
  - $x_2 = 1_{(2)}, \qquad y_2 = 2_{(3)}$
- (x_2, y_2) szacuje z dołu najmniejszy punkt stały E^*

Duże oszacowanie: przykład

- $E: \begin{cases} x &= (x+y) \vee 0 \\ y &= (x+1) \wedge 10 \end{cases}$
- $E^*: \begin{cases} x &= (\mathrm{inc}(x) + \mathrm{inc}(y)) \vee 0_{(0)} \\ y &= (\mathrm{inc}(x) + 1_{(0)}) \wedge 10_{(0)} \end{cases}$
- Pierwsza faza BF:
  - $x_0 = -\infty$, $y_0 = -\infty$
  - $x_1 = 0_{(0)}$, $y_1 = 1_{(1)}$
  - $x_2 = 1_{(2)}$, $y_2 = 2_{(3)}$
- (x_2, y_2) szacuje z dołu najmniejszy punkt stały E^*

Duże oszacowanie: przykład

- $E: \begin{cases} x &= (x+y) \vee 0 \\ y &= (x+1) \wedge 10 \end{cases}$
- $E^*: \begin{cases} x &= (\mathrm{inc}(x) + \mathrm{inc}(y)) \vee 0_{(0)} \\ y &= (\mathrm{inc}(x) + 1_{(0)}) \wedge 10_{(0)} \end{cases}$
- Pierwsza faza BF:
  - $x_0 = -\infty, \quad y_0 = -\infty$
  - $x_1 = 0_{(0)}, \quad y_1 = 1_{(1)}$
  - $x_2 = 1_{(2)}, \quad y_2 = 2_{(3)}$
- (x_2, y_2) szacuje z dołu najmniejszy punkt stały E^*

Metoda w całości

- Dane: E
  Szukane: najmniejszy punkt stały L_E

1. Wzbogać E do E^*
2. Znajdź (przy pomocy $\frac{1}{2}$BF) duże przybliżenie $x_0 \leq L_{E^*}$
   - Jeśli x_0 - małe, usuń niektóre zmienne $\longrightarrow \tilde{x_0} \leq \tilde{L_E}$
3. Użyj przybliżenia x_0 jako startu dla poprawiania strategii
4. $\forall_\pi$ szukamy punktu stałego E^*_π powyżej x_0, więc dużego, więc największego. Więc:
   - Możemy użyć (pełnego) BF dla wyrażeń koniunkcyjnych
   - Każdą strategię rozważymy ≤ 1 raz
     $\longrightarrow$ oszacowanie długości procesu poprawiania strategii
5. Zrzutuj znaleziony punkt stały L_{E^*}

Metoda w całości

- Dane: E
  Szukane: najmniejszy punkt stały L_E

1. Wzbogać E do E^*
2. Znajdź (przy pomocy $\frac{1}{2}$BF) duże przybliżenie $x_0 \leq L_{E^*}$
   - Jeśli x_0 - małe, usuń niektóre zmienne $\longrightarrow \tilde{x_0} \leq \tilde{L_E}$
3. Użyj przybliżenia x_0 jako startu dla poprawiania strategii
4. $\forall_\pi$ szukamy punktu stałego E^*_π powyżej x_0, więc dużego, więc największego. Więc:
   - Możemy użyć (pełnego) BF dla wyrażeń koniunkcyjnych
   - Każdą strategię rozważymy ≤ 1 raz
     $\longrightarrow$ oszacowanie długości procesu poprawiania strategii
5. Zrzutuj znaleziony punkt stały L_{E^*}

Metoda w całości

- Dane: E
  Szukane: najmniejszy punkt stały L_E

1 Wzbogać E do E^*

2 Znajdź (przy pomocy $\frac{1}{2}$BF) duże przybliżenie $x_0 \leq L_{E^*}$

- Jeśli x_0 - małe, usuń niektóre zmienne $\longrightarrow \tilde{x_0} \leq \tilde{L_E}$

3 Użyj przybliżenia x_0 jako startu dla poprawiania strategii

4 $\forall_\pi$ szukamy punktu stałego E^*_π powyżej x_0, więc dużego, więc największego. Więc:

- Możemy użyć (pełnego) BF dla wyrażeń koniunkcyjnych
- Każdą strategię rozważymy ≤ 1 raz
  $\longrightarrow$ oszacowanie długości procesu poprawiania strategii

5 Zrzutuj znaleziony punkt stały L_{E^*}

Metoda w całości

- Dane: E
  Szukane: najmniejszy punkt stały L_E

1. Wzbogać E do E^*
2. Znajdź (przy pomocy $\frac{1}{2}$BF) duże przybliżenie $x_0 \leq L_{E^*}$
   - Jeśli x_0 - małe, usuń niektóre zmienne $\longrightarrow \tilde{x_0} \leq \tilde{L_E}$
3. Użyj przybliżenia x_0 jako startu dla poprawiania strategii
4. $\forall_\pi$ szukamy punktu stałego E_π^* powyżej x_0, więc dużego, więc największego. Więc:
   - Możemy użyć (pełnego) BF dla wyrażeń koniunkcyjnych
   - Każdą strategię rozważymy ≤ 1 raz
     $\longrightarrow$ oszacowanie długości procesu poprawiania strategii
5. Zrzutuj znaleziony punkt stały L_{E^*}

Metoda w całości

- Dane: E
  Szukane: najmniejszy punkt stały L_E

1. Wzbogać E do E^*
2. Znajdź (przy pomocy $\frac{1}{2}$BF) duże przybliżenie $x_0 \leq L_{E^*}$
   - Jeśli x_0 - małe, usuń niektóre zmienne $\longrightarrow \tilde{x_0} \leq \tilde{L_E}$
3. Użyj przybliżenia x_0 jako startu dla poprawiania strategii
4. $\forall_\pi$ szukamy punktu stałego E^*_π powyżej x_0, więc dużego, więc największego. Więc:
   - Możemy użyć (pełnego) BF dla wyrażeń koniunkcyjnych
   - Każdą strategię rozważymy ≤ 1 raz
     $\longrightarrow$ oszacowanie długości procesu poprawiania strategii
5. Zrzutuj znaleziony punkt stały L_{E^*}

Metoda w całości

- Dane: E
  Szukane: najmniejszy punkt stały L_E

1. Wzbogać E do E^*
2. Znajdź (przy pomocy $\frac{1}{2}$BF) duże przybliżenie $x_0 \leq L_{E^*}$
   - Jeśli x_0 - małe, usuń niektóre zmienne $\longrightarrow \tilde{x_0} \leq \tilde{L_E}$
3. Użyj przybliżenia x_0 jako startu dla poprawiania strategii
4. $\forall_\pi$ szukamy punktu stałego E^*_π powyżej x_0, więc dużego, więc największego. Więc:
   - Możemy użyć (pełnego) BF dla wyrażeń koniunkcyjnych
   - Każdą strategię rozważymy ≤ 1 raz
     $\longrightarrow$ oszacowanie długości procesu poprawiania strategii
5. Zrzutuj znaleziony punkt stały L_{E^*}

Metoda w całości

- Dane: E
  Szukane: najmniejszy punkt stały L_E

1. Wzbogać E do E^*
2. Znajdź (przy pomocy $\frac{1}{2}$BF) duże przybliżenie $x_0 \leq L_{E^*}$
   - Jeśli x_0 - małe, usuń niektóre zmienne $\longrightarrow \tilde{x_0} \leq \tilde{L_E}$
3. Użyj przybliżenia x_0 jako startu dla poprawiania strategii
4. $\forall_\pi$ szukamy punktu stałego E^*_π powyżej x_0, więc dużego, więc największego. Więc:
   - Możemy użyć (pełnego) BF dla wyrażeń koniunkcyjnych
   - Każdą strategię rozważymy ≤ 1 raz
     $\longrightarrow$ oszacowanie długości procesu poprawiania strategii
5. Zrzutuj znaleziony punkt stały L_{E^*}

Ciąg dalszy przykładu

- $E^* : \quad \begin{cases} x = (\mathrm{inc}(x) + \mathrm{inc}(y)) \vee 0_{(0)} \\ y = (\mathrm{inc}(x) + 1_{(0)}) \wedge 10_{(0)} \end{cases}$
  $a_0 : (1_{(2)}, 2_{(3)})$
- x_0 nie jest rozwiązaniem $\longrightarrow$ strategia π: odrzuć $0_{(0)}$
- $E^*_\pi : \quad \begin{cases} x = (\mathrm{inc}(x) + \mathrm{inc}(y)) \\ y = (\mathrm{inc}(x) + 1_{(0)}) \wedge 10_{(0)} \end{cases}$
- BF dla E^*_π:
  - $x_0 = \infty, \qquad y_0 = \infty$
  - $x_1 = \infty, \qquad y_1 = 10_{(0)}$
  - $x_2 = \infty, \qquad y_2 = 10_{(0)}$
  - Druga faza: czy $(\infty, 10_{(0)})$ - rozwiązanie? TAK
- Mamy $a_1 : (\infty, 10_{(0)})$ - następne przybliżenie L_{E^*}
- a_1 - punkt stały E^* ? TAK $\longrightarrow$ KONIEC
- Rzutujemy: $L_E : \begin{cases} x = \infty \\ y = 10 \end{cases}$

Ciąg dalszy przykładu

- $E^* : \begin{cases} x = (\mathrm{inc}(x) + \mathrm{inc}(y)) \vee 0_{(0)} \\ y = (\mathrm{inc}(x) + 1_{(0)}) \wedge 10_{(0)} \end{cases}$
  $a_0 : (1_{(2)}, 2_{(3)})$
- x_0 nie jest rozwiązaniem $\longrightarrow$ strategia π: odrzuć $0_{(0)}$
- $E^*_\pi : \begin{cases} x = (\mathrm{inc}(x) + \mathrm{inc}(y)) \\ y = (\mathrm{inc}(x) + 1_{(0)}) \wedge 10_{(0)} \end{cases}$
- BF dla E^*_π:
  - $x_0 = \infty, \quad y_0 = \infty$
  - $x_1 = \infty, \quad y_1 = 10_{(0)}$
  - $x_2 = \infty, \quad y_2 = 10_{(0)}$
  - Druga faza: czy $(\infty, 10_{(0)})$ - rozwiązanie? TAK
- Mamy $a_1 : (\infty, 10_{(0)})$ - następne przybliżenie L_{E^*}
- a_1 - punkt stały E^* ? TAK $\longrightarrow$ KONIEC
- Rzutujemy: $L_E : \begin{cases} x = \infty \\ y = 10 \end{cases}$

Ciąg dalszy przykładu

- $E^* : \begin{cases} x &= (\mathrm{inc}(x) + \mathrm{inc}(y)) \vee 0_{(0)} \\ y &= (\mathrm{inc}(x) + 1_{(0)}) \wedge 10_{(0)} \end{cases}$

  $a_0 : (1_{(2)}, 2_{(3)})$
- x_0 nie jest rozwiązaniem $\longrightarrow$ strategia π: odrzuć $0_{(0)}$
- $E^*_\pi : \begin{cases} x &= (\mathrm{inc}(x) + \mathrm{inc}(y)) \\ y &= (\mathrm{inc}(x) + 1_{(0)}) \wedge 10_{(0)} \end{cases}$
- BF dla E^*_π:
  - $x_0 = \infty, \qquad y_0 = \infty$
  - $x_1 = \infty, \qquad y_1 = 10_{(0)}$
  - $x_2 = \infty, \qquad y_2 = 10_{(0)}$
  - Druga faza: czy $(\infty, 10_{(0)})$ - rozwiązanie? TAK
- Mamy $a_1 : (\infty, 10_{(0)})$ - następne przybliżenie L_{E^*}
- a_1 - punkt stały E^* ? TAK $\longrightarrow$ KONIEC
- Rzutujemy: $L_E : \begin{cases} x &= \infty \\ y &= 10 \end{cases}$

Ciąg dalszy przykładu

- E^* : $\begin{cases} x = (\mathrm{inc}(x) + \mathrm{inc}(y)) \vee 0_{(0)} \\ y = (\mathrm{inc}(x) + 1_{(0)}) \wedge 10_{(0)} \end{cases}$

  $a_0 : (1_{(2)}, 2_{(3)})$
- x_0 nie jest rozwiązaniem $\longrightarrow$ strategia π: odrzuć $0_{(0)}$
- E^*_π : $\begin{cases} x = (\mathrm{inc}(x) + \mathrm{inc}(y)) \\ y = (\mathrm{inc}(x) + 1_{(0)}) \wedge 10_{(0)} \end{cases}$
- BF dla E^*_π:
  - $x_0 = \infty$, $y_0 = \infty$
  - $x_1 = \infty$, $y_1 = 10_{(0)}$
  - $x_2 = \infty$, $y_2 = 10_{(0)}$
  - Druga faza: czy $(\infty, 10_{(0)})$ - rozwiązanie? TAK
- Mamy $a_1 : (\infty, 10_{(0)})$ - następne przybliżenie L_{E^*}
- a_1 - punkt stały E^* ? TAK $\longrightarrow$ KONIEC
- Rzutujemy: L_E : $\begin{cases} x = \infty \\ y = 10 \end{cases}$

Ciąg dalszy przykładu

- $E^* : \begin{cases} x = (\mathrm{inc}(x) + \mathrm{inc}(y)) \vee 0_{(0)} \\ y = (\mathrm{inc}(x) + 1_{(0)}) \wedge 10_{(0)} \end{cases}$
  $a_0 : (1_{(2)}, 2_{(3)})$
- x_0 nie jest rozwiązaniem $\longrightarrow$ strategia π: odrzuć $0_{(0)}$
- $E^*_\pi : \begin{cases} x = (\mathrm{inc}(x) + \mathrm{inc}(y)) \\ y = (\mathrm{inc}(x) + 1_{(0)}) \wedge 10_{(0)} \end{cases}$
- BF dla E^*_π:
  - $x_0 = \infty, \quad y_0 = \infty$
  - $x_1 = \infty, \quad y_1 = 10_{(0)}$
  - $x_2 = \infty, \quad y_2 = 10_{(0)}$
  - Druga faza: czy $(\infty, 10_{(0)})$ - rozwiązanie? TAK
- Mamy $a_1 : (\infty, 10_{(0)})$ - następne przybliżenie L_{E^*}
- a_1 - punkt stały E^* ? TAK $\longrightarrow$ KONIEC
- Rzutujemy: $L_E : \begin{cases} x = \infty \\ y = 10 \end{cases}$

Ciąg dalszy przykładu

- $E^* : \begin{cases} x &= (\mathrm{inc}(x) + \mathrm{inc}(y)) \vee 0_{(0)} \\ y &= (\mathrm{inc}(x) + 1_{(0)}) \wedge 10_{(0)} \end{cases}$
  $a_0 : (1_{(2)}, 2_{(3)})$
- x_0 nie jest rozwiązaniem $\longrightarrow$ strategia π: odrzuć $0_{(0)}$
- $E^*_\pi : \begin{cases} x &= (\mathrm{inc}(x) + \mathrm{inc}(y)) \\ y &= (\mathrm{inc}(x) + 1_{(0)}) \wedge 10_{(0)} \end{cases}$
- BF dla E^*_π:
  - $x_0 = \infty, \quad y_0 = \infty$
  - $x_1 = \infty, \quad y_1 = 10_{(0)}$
  - $x_2 = \infty, \quad y_2 = 10_{(0)}$
  - Druga faza: czy $(\infty, 10_{(0)})$ - rozwiązanie? TAK
- Mamy $a_1 : (\infty, 10_{(0)})$ - następne przybliżenie L_{E^*}
- a_1 - punkt stały E^* ? TAK $\longrightarrow$ KONIEC
- Rzutujemy: $L_E : \begin{cases} x &= \infty \\ y &= 10 \end{cases}$

Ciąg dalszy przykładu

- $E^*: \begin{cases} x = (\mathrm{inc}(x) + \mathrm{inc}(y)) \vee 0_{(0)} \\ y = (\mathrm{inc}(x) + 1_{(0)}) \wedge 10_{(0)} \end{cases}$
  $a_0 : (1_{(2)}, 2_{(3)})$
- x_0 nie jest rozwiązaniem $\longrightarrow$ strategia π: odrzuć $0_{(0)}$
- $E^*_\pi: \begin{cases} x = (\mathrm{inc}(x) + \mathrm{inc}(y)) \\ y = (\mathrm{inc}(x) + 1_{(0)}) \wedge 10_{(0)} \end{cases}$
- BF dla E^*_π:
  - $x_0 = \infty, \quad y_0 = \infty$
  - $x_1 = \infty, \quad y_1 = 10_{(0)}$
  - $x_2 = \infty, \quad y_2 = 10_{(0)}$
  - Druga faza: czy $(\infty, 10_{(0)})$ - rozwiązanie? TAK
- Mamy $a_1 : (\infty, 10_{(0)})$ - następne przybliżenie L_{E^*}
- a_1 - punkt stały E^* ? TAK $\longrightarrow$ KONIEC
- Rzutujemy: $L_E : \begin{cases} x = \infty \\ y = 10 \end{cases}$

Ciąg dalszy przykładu

- $E^* : \begin{cases} x = (\mathrm{inc}(x) + \mathrm{inc}(y)) \vee 0_{(0)} \\ y = (\mathrm{inc}(x) + 1_{(0)}) \wedge 10_{(0)} \end{cases}$
  $a_0 : (1_{(2)}, 2_{(3)})$
- x_0 nie jest rozwiązaniem $\longrightarrow$ strategia π: odrzuć $0_{(0)}$
- $E^*_\pi : \begin{cases} x = (\mathrm{inc}(x) + \mathrm{inc}(y)) \\ y = (\mathrm{inc}(x) + 1_{(0)}) \wedge 10_{(0)} \end{cases}$
- BF dla E^*_π:
  - $x_0 = \infty, \quad y_0 = \infty$
  - $x_1 = \infty, \quad y_1 = 10_{(0)}$
  - $x_2 = \infty, \quad y_2 = 10_{(0)}$
  - Druga faza: czy $(\infty, 10_{(0)})$ - rozwiązanie? TAK
- Mamy $a_1 : (\infty, 10_{(0)})$ - następne przybliżenie L_{E^*}
- a_1 - punkt stały E^* ? TAK $\longrightarrow$ KONIEC
- Rzutujemy: $L_E : \begin{cases} x = \infty \\ y = 10 \end{cases}$

Ciąg dalszy przykładu

- $E^* : \begin{cases} x &= (\mathrm{inc}(x) + \mathrm{inc}(y)) \vee 0_{(0)} \\ y &= (\mathrm{inc}(x) + 1_{(0)}) \wedge 10_{(0)} \end{cases}$
  $a_0 : (1_{(2)}, 2_{(3)})$
- x_0 nie jest rozwiązaniem $\longrightarrow$ strategia π: odrzuć $0_{(0)}$
- $E^*_\pi : \begin{cases} x &= (\mathrm{inc}(x) + \mathrm{inc}(y)) \\ y &= (\mathrm{inc}(x) + 1_{(0)}) \wedge 10_{(0)} \end{cases}$
- BF dla E^*_π:
  - $x_0 = \infty, \quad y_0 = \infty$
  - $x_1 = \infty, \quad y_1 = 10_{(0)}$
  - $x_2 = \infty, \quad y_2 = 10_{(0)}$
  - Druga faza: czy $(\infty, 10_{(0)})$ - rozwiązanie? TAK
- Mamy $a_1 : (\infty, 10_{(0)})$ - następne przybliżenie L_{E^*}
- a_1 - punkt stały E^* ? TAK $\longrightarrow$ KONIEC
- Rzutujemy: $L_E : \begin{cases} x &= \infty \\ y &= 10 \end{cases}$

Ciąg dalszy przykładu

- $E^* : \begin{cases} x = (inc(x) + inc(y)) \vee 0_{(0)} \\ y = (inc(x) + 1_{(0)}) \wedge 10_{(0)} \end{cases}$
  $a_0 : (1_{(2)}, 2_{(3)})$
- x_0 nie jest rozwiązaniem $\longrightarrow$ strategia π: odrzuć $0_{(0)}$
- $E^*_\pi : \begin{cases} x = (inc(x) + inc(y)) \\ y = (inc(x) + 1_{(0)}) \wedge 10_{(0)} \end{cases}$
- BF dla E^*_π:
  - $x_0 = \infty, \quad y_0 = \infty$
  - $x_1 = \infty, \quad y_1 = 10_{(0)}$
  - $x_2 = \infty, \quad y_2 = 10_{(0)}$
  - Druga faza: czy $(\infty, 10_{(0)})$ - rozwiązanie? TAK
- Mamy $a_1 : (\infty, 10_{(0)})$ - następne przybliżenie L_{E^*}
- a_1 - punkt stały E^* ? TAK $\longrightarrow$ KONIEC
- Rzutujemy: $L_E : \begin{cases} x = \infty \\ y = 10 \end{cases}$

Ciąg dalszy przykładu

- $E^* : \begin{cases} x = (\mathrm{inc}(x) + \mathrm{inc}(y)) \vee 0_{(0)} \\ y = (\mathrm{inc}(x) + 1_{(0)}) \wedge 10_{(0)} \end{cases}$
  $a_0 : (1_{(2)}, 2_{(3)})$
- x_0 nie jest rozwiązaniem $\longrightarrow$ strategia π: odrzuć $0_{(0)}$
- $E^*_\pi : \begin{cases} x = (\mathrm{inc}(x) + \mathrm{inc}(y)) \\ y = (\mathrm{inc}(x) + 1_{(0)}) \wedge 10_{(0)} \end{cases}$
- BF dla E^*_π:
  - $x_0 = \infty, \quad y_0 = \infty$
  - $x_1 = \infty, \quad y_1 = 10_{(0)}$
  - $x_2 = \infty, \quad y_2 = 10_{(0)}$
  - Druga faza: czy $(\infty, 10_{(0)})$ - rozwiązanie? TAK
- Mamy $a_1 : (\infty, 10_{(0)})$ - następne przybliżenie L_{E^*}
- a_1 - punkt stały E^* ? TAK $\longrightarrow$ KONIEC
- Rzutujemy: $L_E : \begin{cases} x = \infty \\ y = 10 \end{cases}$

Ciąg dalszy przykładu

- $E^* : \begin{cases} x &= (\mathrm{inc}(x) + \mathrm{inc}(y)) \vee 0_{(0)} \\ y &= (\mathrm{inc}(x) + 1_{(0)}) \wedge 10_{(0)} \end{cases}$
  $a_0 : (1_{(2)}, 2_{(3)})$
- x_0 nie jest rozwiązaniem $\longrightarrow$ strategia π: odrzuć $0_{(0)}$
- $E^*_\pi : \begin{cases} x &= (\mathrm{inc}(x) + \mathrm{inc}(y)) \\ y &= (\mathrm{inc}(x) + 1_{(0)}) \wedge 10_{(0)} \end{cases}$
- BF dla E^*_π:
  - $x_0 = \infty, \qquad y_0 = \infty$
  - $x_1 = \infty, \qquad y_1 = 10_{(0)}$
  - $x_2 = \infty, \qquad y_2 = 10_{(0)}$
  - Druga faza: czy $(\infty, 10_{(0)})$ - rozwiązanie? TAK
- Mamy $a_1 : (\infty, 10_{(0)})$ - następne przybliżenie L_{E^*}
- a_1 - punkt stały E^* ? TAK $\longrightarrow$ KONIEC
- Rzutujemy: $L_E : \begin{cases} x &= \infty \\ y &= 10 \end{cases}$

Ciąg dalszy przykładu

- $E^* : \begin{cases} x = (\mathrm{inc}(x) + \mathrm{inc}(y)) \vee 0_{(0)} \\ y = (\mathrm{inc}(x) + 1_{(0)}) \wedge 10_{(0)} \end{cases}$
  $a_0 : (1_{(2)}, 2_{(3)})$
- x_0 nie jest rozwiązaniem $\longrightarrow$ strategia π: odrzuć $0_{(0)}$
- $E^*_\pi : \begin{cases} x = (\mathrm{inc}(x) + \mathrm{inc}(y)) \\ y = (\mathrm{inc}(x) + 1_{(0)}) \wedge 10_{(0)} \end{cases}$
- BF dla E^*_π:
  - $x_0 = \infty, \quad y_0 = \infty$
  - $x_1 = \infty, \quad y_1 = 10_{(0)}$
  - $x_2 = \infty, \quad y_2 = 10_{(0)}$
  - Druga faza: czy $(\infty, 10_{(0)})$ - rozwiązanie? TAK
- Mamy $a_1 : (\infty, 10_{(0)})$ - następne przybliżenie L_{E^*}
- a_1 - punkt stały E^* ? TAK $\longrightarrow$ KONIEC
- Rzutujemy: $L_E : \begin{cases} x = \infty \\ y = 10 \end{cases}$

Plan

Język przedziałów

- Wyrażenia przedziałowe:

$$i ::= \emptyset \mid [a, b] \mid x \mid i \cup i \mid i \cap i \mid i + i$$

- Potem również

$$i ::= \ldots \mid i \cdot i$$

- Monotoniczne! (i ciągłe)
- Inne ciekawe:

$$i \uparrow = i + [0, \infty]$$

$$i \downarrow = i + [-\infty, 0]$$

$$i : j = i \cdot [0, 0] + j$$

Język przedziałów

- Wyrażenia przedziałowe:

$$i ::= \emptyset \mid [a, b] \mid x \mid i \cup i \mid i \cap i \mid i + i$$

- Potem również

$$i ::= \ldots \mid i \cdot i$$

- Monotoniczne! (i ciągłe)
- Inne ciekawe:

$$i \uparrow = i + [0, \infty]$$

$$i \downarrow = i + [-\infty, 0]$$

$$i : j = i \cdot [0, 0] + j$$

Język przedziałów

- Wyrażenia przedziałowe:

$$i ::= \emptyset \mid [a, b] \mid x \mid i \cup i \mid i \cap i \mid i + i$$

- Potem również

$$i ::= \ldots \mid i \cdot i$$

- Monotoniczne! (i ciągłe)
- Inne ciekawe:

$$i \uparrow = i + [0, \infty]$$

$$i \downarrow = i + [-\infty, 0]$$

$$i : j = i \cdot [0, 0] + j$$

Język przedziałów

- Wyrażenia przedziałowe:

$$i ::= \emptyset \mid [a, b] \mid x \mid i \cup i \mid i \cap i \mid i + i$$

- Potem również

$$i ::= \dots \mid i \cdot i$$

- Monotoniczne! (i ciągłe)
- Inne ciekawe:

$$i \uparrow = i + [0, \infty]$$
$$i \downarrow = i + [-\infty, 0]$$
$$i : j = i \cdot [0, 0] + j$$

Od przedziałów do liczb

- Przedział *i* reprezentujemy za pomocą dwóch liczb: i^+ - prawy koniec, i^- - *minus* lewy koniec
- Przykład:

$$(i \cup j)^+ = i^+ \vee j^+, \qquad (i \cup j)^- = i^- \vee j^- \quad (!)$$

- Uwaga! „[2, 1]” + „[3, 10]” = „[5, 11]”??
  $\Rightarrow$ trzeba pamiętać, które przedziały są puste

Od przedziałów do liczb

- Przedział *i* reprezentujemy za pomocą dwóch liczb: i^+ - prawy koniec, i^- - *minus* lewy koniec
- Przykład:

$$(i \cup j)^+ = i^+ \vee j^+, \qquad (i \cup j)^- = i^- \vee j^- \quad (!)$$

- Uwaga! „[2, 1]” + „[3, 10]” = „[5, 11]”??
  $\Rightarrow$ trzeba pamiętać, które przedziały są puste

Od przedziałów do liczb

- Przedział i reprezentujemy za pomocą dwóch liczb: i^+ - prawy koniec, i^- - *minus* lewy koniec
- Przykład:

$$(i \cup j)^+ = i^+ \vee j^+, \qquad (i \cup j)^- = i^- \vee j^- \quad (!)$$

- Uwaga! „[2, 1]” + „[3, 10]” = „[5, 11]”??
  $\Rightarrow$ trzeba pamiętać, które przedziały są puste

Od przedziałów do liczb

- Przedział *i* reprezentujemy za pomocą dwóch liczb: i^+ - prawy koniec, i^- - *minus* lewy koniec
- Przykład:

$$(i \cup j)^+ = i^+ \vee j^+, \qquad (i \cup j)^- = i^- \vee j^- \quad (!)$$

- Uwaga! „[2, 1]” + „[3, 10]” = „[5, 11]”??
  $\Rightarrow$ trzeba pamiętać, które przedziały są puste

Strategie pustości

- *Strategia* dla wyrażenia przedziałowego:
  wybór zmiennych, dla których przedziały są puste
  (oraz wyrażeń, które wskutek tego wyliczają się do $\emptyset$)
- Dualny porządek na strategiach
- Znów poprawiamy, choć inaczej niż wcześniej

Strategie pustości

- *Strategia* dla wyrażenia przedziałowego:
  wybór zmiennych, dla których przedziały są puste
  (oraz wyrażeń, które wskutek tego wyliczają się do $\emptyset$)
- Dualny porządek na strategiach
- Znów poprawiamy, choć inaczej niż wcześniej

Literatura

1. P. Cousot,
   The Calculational Design of a Generic Abstract Intepreter
   `http://www.di.ens.fr/~cousot/publications.www/Cousot-Marktoberdorf98.pdf.gz`
2. Th. Gawlitza, H. Seidl,
   Precise Fixpoint Computation Through Strategy Iteration
   `http://www2.in.tum.de/~seidl/papers/esop-strategy.ps`
3. Th. Gawlitza, J. Reineke, H. Seidl, R. Wilhelm,
   Polynomial (Exact|Precise) Interval Analysis Revisited
   `http://www2.in.tum.de/~seidl/papers/interval.ps`