Języki, automaty i obliczenia
zadania z gwiazdką (seria 2), termin: 20 maja 2016

Zad. 1. Załóżmy, że litery alfabetu są liniowo uporządkowane relacją $\leq$, i rozważmy *sortujące* automaty ze stosem. Automaty te mają dodatkowo przejścia sortujące postaci $q \overset{a}{\to} q'$, które oprócz zmiany stanu z q na q' sortują stos względem porządku $\leq$. Podaj algorytm, który stwierdzi czy język akceptowany przez dany automat sortujący jest niepusty.

Zad. 2. Język generowany przez gramatykę bezkontekstową to najmniejsze rozwiązanie pewnego układu równań, np. język $L = \{a^n b^n : n \in \mathbb{N}\}$ jest najmniejszym rozwiązaniem poniższego układu równań, $L = L(X)$:

$$\begin{aligned} X &= \{\varepsilon\} \cup Y \\ Y &= \{a\}X\{b\}. \end{aligned}$$

Ogólna forma układów równań jest następująca: dla każdej zmiennej Z jest dokładnie jedno równanie postaci $Z = t_Z$, którego prawa strona t_Z może zawierać zmienne, języki jednoelementowe, konkatenacje i sumy.

Uogólnijmy układy równań dopuszczając, oprócz sum, także *przecięcia*. Oto przykładowy układ równań, którego najmniejsze rozwiązanie to $L(S) = \{a^n b^n c^n : n \in \mathbb{N}\}$:

$$\begin{aligned} S &= XC \cap AY & \qquad C &= \{\varepsilon\} \cup \{c\}C \\ A &= \{\varepsilon\} \cup \{a\}A & \qquad Y &= \{\varepsilon\} \cup \{b\}Y\{c\}. \end{aligned}$$

Czy najmniejsze rozwiązania uogólnionych układów równań, w przypadku alfabetu jednoliterowego, są językami regularnymi?

Zad. 3. Homomorfizm $h : A^* \to B^*$ nazwijmy *literowym* jeśli dla każdej litery $a \in A$, słowo $h(a) \in B^*$ jest jednoliterowe. Dla $k \geq 1$, język nawiasowy N_k to język poprawnie zbudowanych wyrażeń nawiasowych używających k różnych par nawiasów. Np. dla $k = 2$:

$$\langle\,(\,\langle\,(\,)\,\rangle\,)\,\langle\,\rangle\,\rangle \in N_2 \qquad (\,\langle\,)\,\rangle \notin N_2 \qquad (\,\langle\,\rangle \notin N_2.$$

Pokaż, że każdy język bezkontekstowy L zawierający tylko słowa długości parzystej jest obrazem homomorficznym

$$L = \vec{h}(K \cap N_k),$$

dla pewnego $k \in \mathbb{N}$, języka regularnego K i homomorfizmu literowego h.