

Języki, automaty i obliczenia

zadania z gwiazdką (seria 1), termin: 6 kwietnia 2016

Zad. 1. Niech $\mathcal{A}$ będzie automatem jednoznaczynym o n stanach, nad alfabetem A . Udowodnij, że jeśli $L(\mathcal{A}) \neq A^*$ to istnieje słowo $w \notin L(\mathcal{A})$ o długości co najwyżej n .

Zad. 2. Zdefiniujmy operację *przeplotowej gwiazdki* jako

$$L^\odot = \{\varepsilon\} \cup L \cup L \otimes L \cup L \otimes L \otimes L \cup \dots,$$

gdzie $\otimes$ to przeplot języków. Zdefiniuj języki regularne L, M takie, że język

$$L \cap M^\odot$$

jest skończony, ale zawiera słowo długości większej niż 2^n , gdzie n to suma rozmiarów automatów rozpoznających L i M .

Zad. 3. *Automat okienkowy* $(B, \leq, \delta)$ nad alfabetem A składa się ze skończonego alfabetu roboczego B , który jest częściowo uporządkowany relacją $\leq$ i zawiera A , oraz z funkcji przejścia

$$\delta : (B \cup \{\vdash\}) \times B \times B \rightarrow B \cup \{\Rightarrow\}.$$

Zakładamy, że słowo wejściowe $a_1 \dots a_n$ ma długość przynajmniej 2, i jest otoczone pomocniczymi symbolami $\vdash, \dashv$:

$$\vdash a_1 \dots a_n \dashv.$$

Po każdym kroku obliczenia automat znajduje się nad którąś z pozycji $1 \dots n$ słowa. Na pozycji i , automat „widzi” okienko złożone z 3 liter na pozycjach $i-1, i, i+1$. Pozycja początkowa to 1, więc na początku obliczenia automat widzi okienko $\vdash a_1 a_2$.

Widząc okienko $c_1 c_2 c_3$, automat wykonuje następujący krok:

- jeśli $\delta(c_1, c_2, c_3) = \Rightarrow$, automat przesuwa się o jedną pozycję w prawo;
- jeśli $\delta(c_1, c_2, c_3) = b$ i $b < c_2$, automat zastępuje c_2 przez b i przesuwa się na pozycję 1.

Automat kończy obliczenie i akceptuje, gdy dojdzie do pozycji n (innymi słowy, gdy w okienku pojawi się symbol $\dashv$).

Udowodnij, że automaty okienkowe rozpoznają tylko języki regularne.