Języki, automaty i obliczenia

Wykład 5: Wariacje na temat automatów skończonych

Sławomir Lasota

Uniwersytet Warszawski

25 marca 2015

Plan

1. Automaty dwukierunkowe
2. *Automaty alternujące

Automaty dwukierunkowe

(Niedeterministyczny) *automat dwukierunkowy* $\mathcal{A} = (A, \vdash, \dashv, Q, I, F, \delta)$

$$\delta \subseteq Q \times (A \cup \{\vdash, \dashv\}) \times Q \times \{-1, 0, 1\}$$

$(q, a, q', k) \in \delta$: czytaj a, zmień stan z q na q', zmień pozycję o k

Ustalmy słowo wejściowe $w \in A^*$, niech $n = |w|$.

Konfiguracja automatu $\mathcal{A}$ na słowie w to para $(q, i) \in Q \times \{0 \ldots n+1\}$

$$\longleftarrow \quad \overset{q}{\nabla} \quad \longrightarrow$$

$\vdash$	a	b	a	a	b	a	b	$\dashv$
0	1		...	i			n	n+1

Konfiguracje początkowe: $I \times \{1\}$
Konfiguracje akceptujące: $F \times \{n+1\}$

Zabraniamy przejść postaci

$$(q, \vdash, q', -1) \qquad (q, \dashv, q', 1),$$

czyli: $\delta \cap (Q \times \{\vdash\} \times Q \times \{-1\} \cup Q \times \{\dashv\} \times Q \times \{1\}) = \emptyset$

Przykład

Pytanie

Jaki język rozpoznaje ten automat dwukierunkowy?

- $A = \{a, b\}$
- $Q = \{q_0, q_1, q_2, p_1, p_2, a\}$
- $I = \{q_0\}$
- $F = \{a\}$

	$\vdash$	a	b	$\dashv$
q_0	$(q_0, +1)$	$(q_1, +1)$	$(q_0, +1)$	$(p_0, -1)$
q_1		$(q_2, +1)$	$(q_1, +1)$	
q_2		$(q_0, +1)$	$(q_2, +1)$	
p_0	$(a, +1)$	$(p_0, -1)$	$(p_1, -1)$	
p_1		$(p_1, -1)$	$(p_0, -1)$	
a	$(a, +1)$	$(a, +1)$	$(a, +1)$	

Biegi automatu dwukierunkowego

Ustalmy automat dwukierunkowy $\mathcal{A} = (A, \vdash, \dashv, Q, I, F, \delta)$ i słowo

$$w = a_1 \dots a_n \in A^*.$$

Definiujemy relację przejścia pomiędzy *konfiguracjami* automatu $\mathcal{A}$ na słowie w.

$$(q, i) \longrightarrow (q', i + k)$$

wtw. gdy

- $1 \leq i \leq n$ oraz δ zawiera przejście (q, a_i, q', k), lub
- $i = 0$ oraz δ zawiera przejście $(q, \vdash, q', k)$, lub
- $i = n + 1$ oraz δ zawiera przejście $(q, \dashv, q', k)$.

Bieg na słowie w to ciąg konfiguracji $(q_0, i_0), \dots, (q_m, i_m)$, gdzie $q_0 \in I$, $i_0 = 0$, oraz

$$(q_j, i_j) \longrightarrow (q_{j+1}, i_{j+1}), \qquad \text{dla } j = 0, \dots, m - 1.$$

Bieg jest akceptujący jeśli $q_m \in F$ oraz $i_m = n + 1$.

Pytanie

Jak długi może być bieg automatu dwukierunkowego na słowie w ?

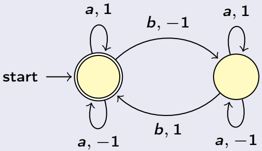
Język automatu dwukierunkowego

Język rozpoznawany przez $\mathcal{A}$:

$$L(\mathcal{A}) \;=\; \{\, w \in A^* \;:\; \mathcal{A} \text{ ma bieg akceptujący na } w \,\}.$$

Pytanie

Jaki język rozpoznaje ten automat dwukierunkowy?

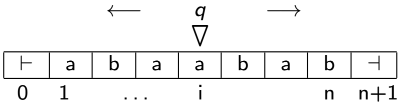


($\vdash, \dashv$ nieużywane)

Pytanie

Czy automaty dwukierunkowe rozpoznają więcej języków niż automaty jednokierunkowe?

Automaty dwukierunkowe jako maszyny Turinga



$$\begin{aligned}\text{Automaty dwukierunkowe} &= \text{maszyny Turinga ze stałą pamięcią}\\ &= \text{maszyny Turinga z taśmą wejściową tylko do odczytu,}\\ &\ \text{bez taśmy roboczej}\end{aligned}$$

Deterministyczne automaty dwukierunkowe

Automat dwukierunkowy $\mathcal{A} = (A, \vdash, \dashv, Q, I, F, \delta)$ jest *deterministyczny*, jeśli relacja przejścia jest funkcją:

$$\delta : Q \times A \to Q \times \{-1, 0, 1\}$$

	$\vdash$	a	b	$\dashv$
q_0	$(q_0, +1)$	$(q_1, +1)$	$(q_0, +1)$	$(p_0, -1)$
q_1		$(q_2, +1)$	$(q_1, +1)$	
q_2		$(q_0, +1)$	$(q_2, +1)$	
p_0	$(a, +1)$	$(p_0, -1)$	$(p_1, -1)$	
p_1		$(p_1, -1)$	$(p_0, -1)$	
a	$(a, +1)$	$(a, +1)$	$(a, +1)$	

Pytanie

Ile stanów musi mieć deterministyczny automat dwukierunkowy dla języka

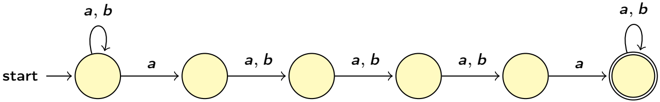
$$L_n = A^* \, a \, A^{n-1}?$$

Deterministyczne automaty dwukierunkowe (c.d.)

Pytanie

Ile stanów musi mieć deterministyczny automat dwukierunkowy dla języka

$$L_n \;=\; A^*\, a\, A^{n-1}\, a\, A^*?$$



Odpowiedź

idź w prawo do pierwszej a
idź n kroków w prawo
jeśli a to akceptuj
w.p.p.
    idź $n-1$ kroków w lewo
    kontynuuj od pierwszej instrukcji

wyjątek: jeśli $\dashv$ to odrzuć

Automaty dwukierunkowe a jednokierunkowe

Pytanie

Czy automaty dwukierunkowe rozpoznają więcej języków niż automaty jednokierunkowe?

Twierdzenie (Rabin, Scott 1959; Shepardson 1959)

Automaty dwukierunkowe rozpoznają języki regularne.

Dowód (Vardi 1989):

Niech $\mathcal{A} = (A, \vdash, \dashv, Q, I, F, \delta)$ automat dwukierunkowy.

Fakt

$w = a_1 \dots a_n \notin L(\mathcal{A})$ *wtw. gdy* $\exists P_0, P_1, \dots, P_{n+1}$ *t.że*

- $I \subseteq P_1$
- $F \cap P_{n+1} = \emptyset$
- $\forall i \in \{0 \dots n+1\}.\ (q, a_i, q', k) \in \delta \ \wedge\ q \in P_i \implies q' \in P_{i+k}$

$(a_0 = \vdash,\ a_{n+1} = \dashv)$

P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8
$\vdash$	a	b	a	a	b	a	b	$\dashv$

Dowód (c.d.):

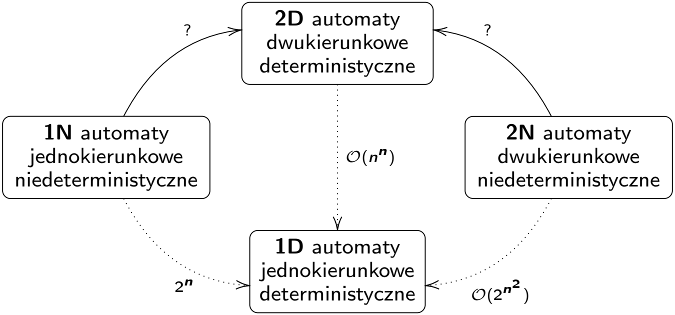
Definiujemy niedeterministyczny automat jednokierunkowy $\mathcal{A}'$:

- $Q' \;=\; \mathcal{P}(Q) \times \mathcal{P}(Q)$
- $\delta' \;=\; \{((P,P'),a,(P',P'')) \;:\; \begin{array}{l} \forall p' \in P', q \in Q.\ (p',a,q,-1) \in \delta \implies q \in P \\ \forall p' \in P', q \in Q.\ (p',a,q,0) \in \delta \implies q \in P' \\ \forall p' \in P', q \in Q.\ (p',a,q,1) \in \delta \implies q \in P''\} \end{array}$
- $I' \;=\; \{(P,P') \;:\; \begin{array}{l} I \subseteq P' \\ \forall p \in P, q \in Q.\ (p,\vdash,q,0) \in \delta \implies q \in P \\ \forall p \in P, q \in Q.\ (p,\vdash,q,1) \in \delta \implies q \in P'\} \end{array}$
- $F' \;=\; \{(P,P') \;:\; \begin{array}{l} P' \cap F = \emptyset \\ \forall p' \in P', q \in Q.\ (p',\dashv,q,0) \in \delta \implies q \in P' \\ \forall p' \in P', q \in Q.\ (p',\dashv,q,-1) \in \delta \implies q \in P\} \end{array}$

Z faktu z poprzedniego slajdu wynika:

$$w \in L(\mathcal{A}') \iff w \notin L(\mathcal{A})$$

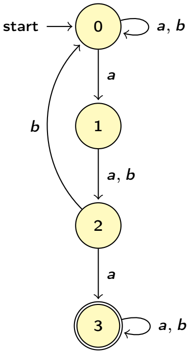
Determinizacja

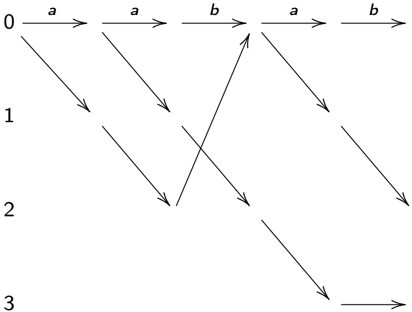


Plan

$A = \{a, b\}$

$L_n \;=\; A^* a\, A\, a\, A^*$ $\qquad$ $w = aabab$

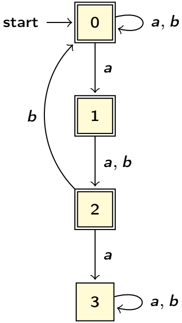


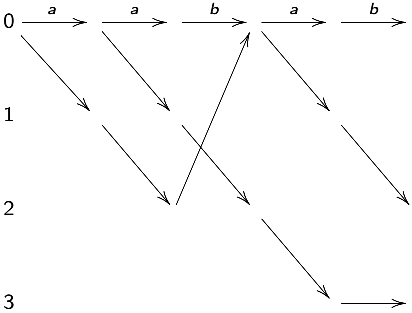


$A = \{a, b\}$

$A^* - L_n$

$w = aabab$

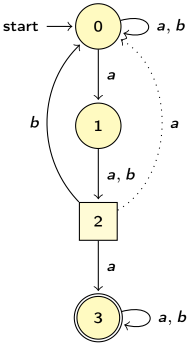


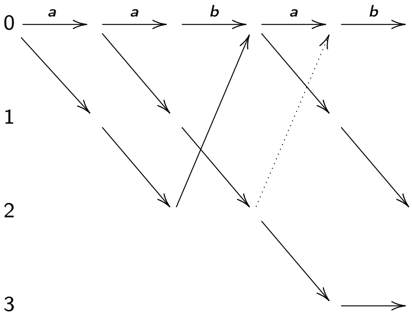


Notacja

Stany egzystencjalne i uniwersalne:

$\exists$ $\forall$





Automat alternujący

$$\mathcal{A} \;=\; (A, Q_\exists, Q_\forall, q_0, F, \delta), \qquad Q_\exists \cap Q_\forall = \emptyset, \qquad Q \;=\; Q_\exists \cup Q_\forall$$

Zakładamy, że dla każdego $q \in Q$ i $a \in A$, istnieje $p \in Q$ t.że $(q, a, p) \in \delta$.

Ustalmy słowo wejściowe $w \;=\; a_1 \dots a_n \in A^*$.

Gra o akceptację $\mathcal{G}_{\mathcal{A},w}$:

- gracze: Automat, Przeciwnik
- pozycje Automatu: $Q_\exists \times \{0 \dots n\}$
- pozycje Przeciwnika: $Q_\forall \times \{0 \dots n\}$
- pozycja początkowa: $(q_0, 0)$
- ruch $(q, i{-}1) \longrightarrow (q', i)$ jeśli $(q, a_i, q') \in \delta$
- Automat wygrywa, gdy gra osiągnie pozycję (q, n), gdzie $q \in F$

Język rozpoznawany przez automat $\mathcal{A}$:

$$L(\mathcal{A}) \;=\; \{\, w \in A^* \;:\; \text{Automat ma strategię wygrywającą w grze } \mathcal{G}_{\mathcal{A},w} \text{ z } (q_0, 0) \,\}$$

Język rozpoznawany przez automat $\mathcal{A}$:

$$L(\mathcal{A}) \;=\; \{\, w \in A^* \;:\; \text{Automat ma strategię wygrywającą w grze } \mathcal{G}_{\mathcal{A},w} \text{ z } (q_0, 0)\,\}$$

Automat ma strategię wygrywającą w $\mathcal{G}_{\mathcal{A},w}$ z (q, n) wtw. gdy $q \in F$

$$W^n_{\mathcal{A},w} \;=\; F$$

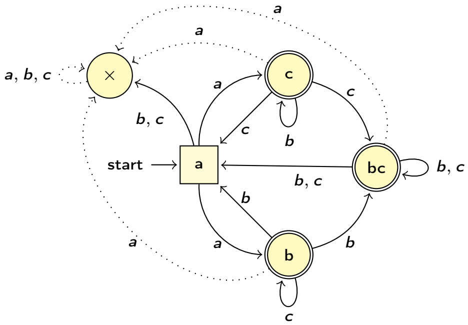
Automat ma strategię wygrywającą w $\mathcal{G}_{\mathcal{A},w}$ z $(q, i{-}1)$ wtw. gdy

- $q \in Q_\exists$ i istnieje $p \in Q$ t.że $(q, a_i, p) \in \delta$ i Automat ma strategię wygrywającą w $\mathcal{G}_{\mathcal{A},w}$ z (p, i), albo
- $q \in Q_\forall$ i dla każdego $p \in Q$ t.że $(q, a_i, p) \in \delta$, Automat ma strategię wygrywającą w $\mathcal{G}_{\mathcal{A},w}$ z (p, i)

$$\begin{aligned} W^{i-1}_{\mathcal{A},w} \;=\; &\{\, q \in Q_\exists \;:\; \exists p \in Q.\ (q, a_i, p) \in \delta \;\wedge\; p \in W^i_{\mathcal{A},w}\,\} \;\cup \\ &\{\, q \in Q_\forall \;:\; \forall p \in Q.\ (q, a_i, p) \in \delta \implies p \in W^i_{\mathcal{A},w}\,\} \end{aligned}$$

$$L(\mathcal{A}) \;=\; \{\, w \in A^* \;:\; q_0 \in W^0_{\mathcal{A},w}\,\}$$

Przykład



Pytanie

Czy $abbca \in L(\mathcal{A})$? Jaki język rozpoznaje ten automat?

Odpowiedź

$\big(a(LbL \cap LcL)\big)^* aL$, gdzie $L \;=\; (b+c)^*$

Pytanie

Jak przerobić automat alternujący $\mathcal{A}$ na automat rozpoznający język $A^* - L(\mathcal{A})$?

$$\begin{aligned}
W^{i-1}_{\mathcal{A},w} &= \{\, q \in Q_\exists \;:\; \exists p \in Q.\ (q, a_i, p) \in \delta \;\wedge\; p \in W^{i}_{\mathcal{A},w} \,\} \cup \\
&\quad \{\, q \in Q_\forall \;:\; \forall p \in Q.\ (q, a_i, p) \in \delta \implies p \in W^{i}_{\mathcal{A},w} \,\} \\
W^{n}_{\mathcal{A},w} &= F
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P^{i-1}_{\mathcal{A},w} &= \{\, q \in Q_\forall \;:\; \exists p \in Q.\ (q, a_i, p) \in \delta \;\wedge\; p \in P^{i}_{\mathcal{A},w} \,\} \cup \\
&\quad \{\, q \in Q_\exists \;:\; \forall p \in Q.\ (q, a_i, p) \in \delta \implies p \in P^{i}_{\mathcal{A},w} \,\} \\
P^{n}_{\mathcal{A},w} &= Q - F
\end{aligned}$$

Pytanie

Czy automaty alternujące rozpoznają więcej języków niż automaty niedeterministyczne?

Twierdzenie

Automaty alternujące rozpoznają języki regularne.

Dowód:

Niech $\mathcal{A} = (A, Q_\exists, Q_\forall, q_0, F, \delta)$ automat alternujący.

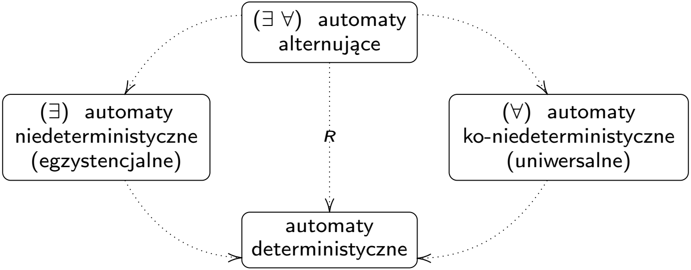
Konstruujemy automat niedeterministyczny $\mathcal{A}' = (A, Q', I', F', \delta')$:

- $Q' = \mathcal{P}(Q)$
- $I' = \{ X \subseteq Q : q_0 \in X \}$
- $F' = \{F\}$
- $(X, a, Y) \in \delta'$ wtw. gdy

$$\begin{aligned} X = & \{ q \in Q_\exists : \exists p \in Q.\ (q, a, p) \in \delta \ \wedge \ p \in Y \} \cup \\ & \{ q \in Q_\forall : \forall p \in Q.\ (q, a, p) \in \delta \implies p \in Y \} \end{aligned}$$

$$w \in L(\mathcal{A}') \iff \exists X.\ q_0 \in X \ \wedge \ (X, w, F) \in \widehat{\delta}' \iff q_0 \in W^0_{\mathcal{A},w} \iff w \in L(\mathcal{A})$$

Automaty alternujące a języki regularne *



Fakt

Automat $(\mathcal{A}')^R$ jest deterministyczny.

W następnym odcinku:

automaty na... drzewach