

# Języki, automaty i obliczenia

## Wykład 4: Minimalizacja automatów skończonych

Sławomir Lasota

**Uniwersytet Warszawski**

23 marca 2016

- 1 Języki regularne mają skończenie wiele ilorazów lewostronnych
- 2 Minimalizacja automatów deterministycznych
- 3 \*Minimalizacja automatów niedeterministycznych?

## Notacja

$w^{-1}L$  zamiast  $\{w\}^{-1}L = \{u \in A^* : wu \in L\}$

Język  $L \subseteq A^*$  określa relację równoważności w  $A^*$ :

$$w \sim_L v \iff w^{-1}L = v^{-1}L$$

Równoważnie:

$$w \sim_L v \iff \forall u \in A^*. (wu \in L \iff vu \in L)$$

## Fakt ( $\sim_L$ jest $L$ -niezmiennicza)

$$w \sim_L v \implies (w \in L \iff v \in L)$$

rysunek

Dowód:

$$w \in L \iff \varepsilon \in w^{-1}L$$

$$w \sim_L v \iff w^{-1}L = v^{-1}L \iff \forall u \in A^*. (wu \in L \iff vu \in L)$$

### Przykład

$$A = \{a, b\}$$

$$L = (ab)^*$$

$$\varepsilon^{-1}L = L$$

$$a^{-1}L = bL$$

$$b^{-1}L = \emptyset$$

$$\varepsilon \sim_L ab \sim_L abab \sim_L \dots$$

$$a \sim_L aba \sim_L ababa \sim_L \dots$$

$$b \sim_L aa \sim_L abb \sim_L \dots$$

$$A = \{a, b\}$$

$$L = \{a^n b^n : n \in \mathbb{N}\}$$

$$(a^k)^{-1}L = \{a^n b^{n+k} : n \in \mathbb{N}\}$$

### Twierdzenie (Myhill-Nerode 1958)

Niech  $L \subseteq A^*$ . Następujące warunki są równoważne:

- $L$  jest regularny
- $\sim_L$  ma skończony indeks

## Dowód ( $L$ regularny $\implies \sim_L$ ma skończony indeks)

Niech  $\mathcal{A} = (A, Q, \{q_0\}, F, \delta)$  automat deterministyczny rozpoznający  $L$ .

Dla  $q \in Q$ , niech  $L_q(\mathcal{A}) = \dots$

### Fakt

$L_{\hat{\delta}(q_0, w)}(\mathcal{A}) = w^{-1}L$ , dla każdego  $w \in A^*$ .

Zdefiniujmy relację równoważności  $\sim_{\mathcal{A}}$  na  $A^*$ :

$$w \sim_{\mathcal{A}} v \iff \hat{\delta}(q_0, w) = \hat{\delta}(q_0, v).$$

Relacja ta ma skończony indeks. Używamy faktu powyżej, by dowieść

$$w \sim_{\mathcal{A}} v \implies w \sim_L v.$$

Czyli indeks relacji  $\sim_L$  jest nie większy niż indeks relacji  $\sim_{\mathcal{A}}$ .

### Wniosek

*Każdy automat deterministyczny rozpoznający język  $L$  ma przynajmniej indeks( $\sim_L$ ) stanów.*

Fakt ( $\sim_L$  jest prawą kongruencją)

$$w \sim_L v \implies w a \sim_L v a$$

Dowód:

$$(w a)^{-1} L = a^{-1} (w^{-1} L) = a^{-1} (v^{-1} L) = (v a)^{-1} L$$

Konstruujemy automat deterministyczny  $\mathcal{A}_L$ :

- $Q' = A^* / \sim_L = \{ [w]_{\sim_L} : w \in A^* \}$
- $q'_0 = [\varepsilon]_{\sim_L}$
- $F' = \{ [w]_{\sim_L} : w \in L \}$
- $\delta'([w]_{\sim_L}, a) = [w a]_{\sim_L}$

Fakt

$$L(\mathcal{A}_L) = L$$

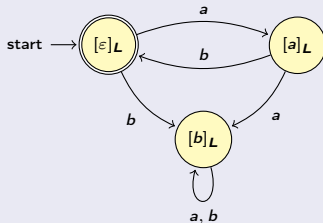
Dowód:

$$\hat{\delta}'([\varepsilon]_{\sim_L}, w) = [w]_{\sim_L} \in F \iff w \in L$$

- $Q' = A^*/\sim_L = \{[w]_{\sim_L} : w \in A^*\}$
- $q'_0 = [\varepsilon]_{\sim_L}$
- $F' = \{[w]_{\sim_L} : w \in L\}$
- $\delta'([w]_{\sim_L}, a) = [w a]_{\sim_L}$

## Przykład

$L = (a b)^*$



Konstruujemy automat deterministyczny  $\mathcal{A}_L$ :

- $Q' = \{ w^{-1}L : w \in A^* \}$
- $q'_0 = L = \varepsilon^{-1}L$
- $F' = \{ M \in Q' : \varepsilon \in M \}$
- $\delta'(M, a) = a^{-1}M$

Fakt

$$\widehat{\delta}'(q'_0, w) = w^{-1}L$$

Dowód:

$$a^{-1}(w^{-1}L) = (wa)^{-1}L$$

Fakt

$$L(\mathcal{A}_L) = L$$

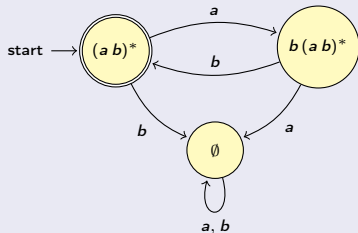
Dowód:

$$w \in L(\mathcal{A}_L) \iff \widehat{\delta}'(q'_0, w) \in F' \iff \varepsilon \in w^{-1}L \iff w \in L$$

- $Q' = \{ w^{-1}L : w \in A^* \}$
- $q'_0 = L = \varepsilon^{-1}L$
- $F' = \{ M \in Q' : \varepsilon \in M \}$
- $\delta'(M, a) = a^{-1}M$

## Przykład

$L = (a b)^*$



## Wniosek

*Każdy automat deterministyczny rozpoznający  $L$  ma przynajmniej  $\text{indeks}(\sim_L)$  stanów.*

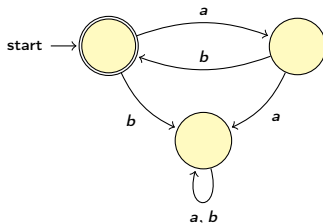
*Automat  $\mathcal{A}_L$  ma  $\text{indeks}(\sim_L)$  stanów.*

*Czyli  $\mathcal{A}_L$  to **minimalny** automat deterministyczny rozpoznający język  $L$ .*

## Pytanie

Czy automat minimalny jest wyznaczony jednoznacznie?

Czy ten automat jest minimalny?



Tak!

Każdy automat deterministyczny rozpoznający  $L = (ab)^*$  ma przynajmniej 3 stany.

*Dowód:*

|               | $\varepsilon$ | $a$      | $b$       |
|---------------|---------------|----------|-----------|
| $\varepsilon$ | ×             | <b>b</b> | <b>ab</b> |
| $a$           | ×             | ×        | <b>b</b>  |
| $b$           | ×             | ×        | ×         |

$\varepsilon b \notin L$        $ab \in L$

$\varepsilon ab \in L$        $ba b \notin L$

$ab \in L$        $bb \notin L$

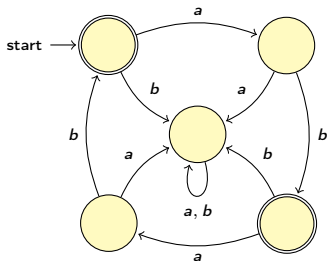
- 1 Języki regularne mają skończenie wiele ilorazów lewostronnych
- 2 Minimalizacja automatów deterministycznych
- 3 \*Minimalizacja automatów niedeterministycznych?

Niech  $\mathcal{A} = (A, Q, \{q_0\}, F, \delta)$  automat deterministyczny.

*Kongruencja* w  $\mathcal{A}$  to relacja równoważności  $R \subseteq Q \times Q$  taka, że

$$R(q, p) \implies (q \in F \iff p \in F)$$

$$R(q, p) \implies R(\delta(q, a), \delta(p, a)), \quad \text{dla każdego } a \in A.$$



Niech  $\mathcal{A} = (A, Q, \{q_0\}, F, \delta)$  automat deterministyczny.

*Kongruencja* w  $\mathcal{A}$  to relacja równoważności  $R \subseteq Q \times Q$  taka, że

$$R(q, p) \implies (q \in F \iff p \in F)$$

$$R(q, p) \implies R(\delta(q, a), \delta(p, a)), \quad \text{dla każdego } a \in A.$$

*Automat ilorazowy*  $\mathcal{A}/R$ :

- $A' = A$
- $Q' = Q/R = \{ [q]_R : q \in Q \}$
- $q'_0 = [q_0]_R$
- $F' = F/R = \{ [q]_R : q \in F \}$
- $\delta'([q]_R, a) = [\delta(q, a)]_R$

**Fakt**

$$L(\mathcal{A}/R) = L(\mathcal{A})$$

*Dowód:*

$$\widehat{\delta'}([q_0]_R, w) = [\widehat{\delta}(q_0, w)]_R$$

# Automat minimalny jako automat ilorazowy

Niech  $\mathcal{A} = (A, Q, \{q_0\}, F, \delta)$  automat deterministyczny. Niech  $L = L(\mathcal{A})$ .  
Założmy, że wszystkie stany automatu  $\mathcal{A}$  są osiągalne.

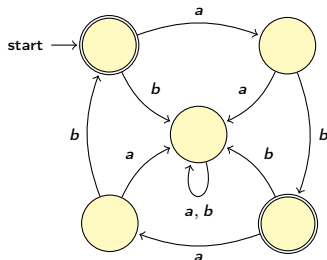
Definiujemy kongruencję w  $\mathcal{A}$  następująco:

$$q \equiv_{\mathcal{A}} p \text{ wtw. gdy } L_q(\mathcal{A}) = L_p(\mathcal{A})$$

Czy to jest kongruencja? Należy sprawdzić:

$$L_q(\mathcal{A}) = L_p(\mathcal{A}) \implies (q \in F \iff p \in F)$$

$$L_q(\mathcal{A}) = L_p(\mathcal{A}) \implies L_{\delta(q,a)}(\mathcal{A}) = L_{\delta(p,a)}(\mathcal{A}), \quad \text{dla każdego } a \in A.$$



Niech  $\mathcal{A} = (A, Q, \{q_0\}, F, \delta)$  automat deterministyczny. Niech  $L = L(\mathcal{A})$ .  
Założmy, że wszystkie stany automatu  $\mathcal{A}$  są osiągalne.

Definiujemy kongruencję w  $\mathcal{A}$  następująco:

$$q \equiv_{\mathcal{A}} p \text{ wtw. gdy } L_q(\mathcal{A}) = L_p(\mathcal{A})$$

## Fakt

*Automaty  $\mathcal{A}/\equiv_{\mathcal{A}}$  i  $\mathcal{A}_L$  są izomorficzne.*

*Dowód:*

- |                                                                 |                                           |
|-----------------------------------------------------------------|-------------------------------------------|
| • $Q' = \{L_q(\mathcal{A}) : q \in Q\}$                         | • $Q' = \{w^{-1}L : w \in A^*\}$          |
| • $q'_0 = L_{q_0}(\mathcal{A})$                                 | • $q'_0 = L = \varepsilon^{-1}L$          |
| • $F' = \{L_q(\mathcal{A}) : q \in F\}$                         | • $F' = \{M \in Q' : \varepsilon \in M\}$ |
| • $\delta'(L_q(\mathcal{A}), a) = L_{\delta(q,a)}(\mathcal{A})$ | • $\delta'(M, a) = a^{-1}M$               |

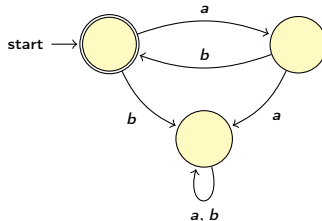
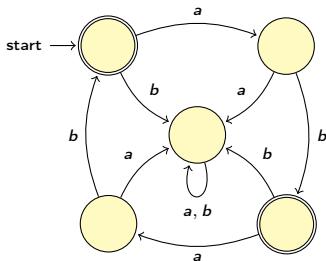
Użyjmy faktu:

$$L_{\widehat{\delta}(q_0, w)}(\mathcal{A}) = w^{-1}L, \quad \text{dla każdego } w \in A^*.$$

## Wniosek

Automat **minimalny**  $\mathcal{A}_L$  jest wyznaczony jednoznacznie (z dokładnością do izomorfizmu).

$$L = (ab)^*$$



## Problem obliczeniowy

Dane: automat deterministyczny  $\mathcal{A}$

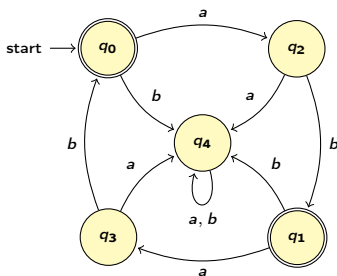
Wynik: automat (izomorficzny do automatu)  $\mathcal{A}_L$

## Algorytm minimalizacji

- usuń stany nieosiągalne z automatu  $\mathcal{A}$
- oblicz relację  $\equiv_{\mathcal{A}}$   $q \equiv_{\mathcal{A}} p$  wtw. gdy  $L_q(\mathcal{A}) = L_p(\mathcal{A})$
- oblicz automat ilorazowy  $\mathcal{A}/\equiv_{\mathcal{A}}$

# Jak obliczyć relację $\equiv_{\mathcal{A}}$ ?

$q \equiv_{\mathcal{A}} p$  wtw. gdy  $L_q(\mathcal{A}) = L_p(\mathcal{A})$



|       | $q_0$ | $q_1$ | $q_2$ | $q_3$ | $q_4$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $q_0$ |       |       | x     | x     | x     |
| $q_1$ |       |       | x     | x     | x     |
| $q_2$ | x     | x     |       |       |       |
| $q_3$ | x     | x     |       |       |       |
| $q_4$ | x     | x     | x     |       |       |

|       | $q_0$ | $q_1$ | $q_2$ | $q_3$ | $q_4$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $q_0$ |       |       | x     | x     | x     |
| $q_1$ |       |       | x     | x     | x     |
| $q_2$ | x     | x     |       |       | x     |
| $q_3$ | x     | x     |       |       | x     |
| $q_4$ | x     | x     | x     | x     |       |

Początkowa równoważność:

$$q \equiv_0 p \iff (q \in F \iff p \in F)$$

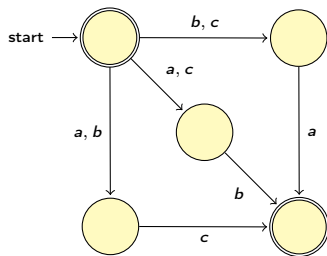
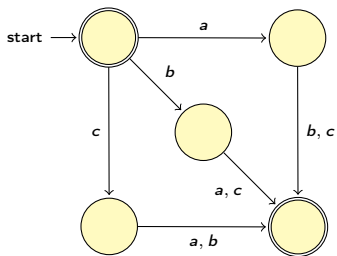
Uszczegółowienie:

$$q \equiv_{n+1} p \iff q \equiv_n p \wedge \forall a \in A \delta(q, a) \equiv_n \delta(p, a)$$

$$q \equiv_{\mathcal{A}} p \iff \forall n \ q \equiv_n p$$

- 1 Języki regularne mają skończenie wiele ilorazów lewostronnych
- 2 Minimalizacja automatów deterministycznych
- 3 \*Minimalizacja automatów niedeterministycznych?

# Brak jednoznaczności



$$q \equiv_{\mathcal{A}} p \iff \forall n \ q \equiv_n p$$

Dla automatów deterministycznych:

$$\begin{aligned} q \equiv_0 p &\iff (q \in F \iff p \in F) \\ q \equiv_{n+1} p &\iff q \equiv_n p \ \wedge \ \forall a \in A \ \delta(q, a) \equiv_n \delta(p, a) \end{aligned}$$

Dla automatów niedeterministycznych:

$$\begin{aligned} q \equiv_0 p &\iff (q \in F \iff p \in F) \\ q \equiv_{n+1} p &\iff q \equiv_n p \ \wedge \ \forall a \in A \\ &\quad \forall q' \ \delta(q, a, q') \implies \exists p' \ \delta(p, a, p') \ \wedge \ \delta(p, a) \equiv_n \delta(q, a) \\ &\quad \forall p' \ \delta(p, a, p') \implies \exists q' \ \delta(q, a, q') \ \wedge \ \delta(p, a) \equiv_n \delta(q, a) \end{aligned}$$

$$q \equiv_{\mathcal{A}} p \iff \text{Duplikator ma strategię wygrywającą z pozycji } (q, p)$$

Dwaj gracze **Spoiler** i **Duplikator**, gra rozgrywana w rundach. Runda rozpoczyna się w pozycji  $(q, p) \in Q^2$  i przebiega następująco:

- **Spoiler** wybiera jeden ze stanów (powiedzmy  $q$ ), literę  $a \in A$ , i stan  $q'$  taki, że

$$\delta(q, a, q');$$

- w odpowiedzi **Duplikator** wybiera stan  $p'$  taki, że

$$\delta(p, a, p')$$

i kolejna runda zaczyna się w pozycji  $(q', p')$ .

Kto nie może wykonać ruchu, natychmiast przegrywa. Rozgrywkę nieskończoną wygrywa zawsze **Duplikator**.

