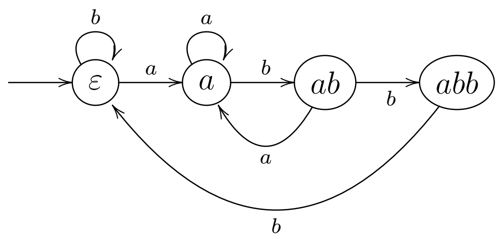
Języki, automaty i obliczenia
kolokwium – przykładowe rozwiązania zadań
18 maja 2016

Zad. 1. Napisz wyrażenie regularne dla dopełnienia języka

$$(a+b)^*abba(a+b)^*,$$

czyli dla języka tych słów nad alfabetem $\{a,b\}$, które nie zawierają infiksu $abba$.

Rozwiązanie 1. Wystarczy opisać wyrażeniem regularnym wszystkie ścieżki, które zaczynają się w stanie początkowym poniższego automatu rozpoznającego interesujący nas język:



Ścieżki, które kończą się w stanie początkowym są opisane przez wyrażenie:

$$(b \;+\; a(a+ba)^*bbb)^*.$$

Ścieżki, które nie kończą się w stanie początkowym są opisane przez wyrażenie:

$$a(a+ba)^*(b+\varepsilon)(b+\varepsilon).$$

Zatem wszystkie ścieżki są opisane przez konkatenację tych wyrażeń:

$$(b \;+\; a(a+ba)^*bbb)^* \; a(a+ba)^*(b+\varepsilon)(b+\varepsilon).$$

Rozwiązanie 2. Dwie litery a w słowie nazwijmy sąsiednimi jeśli pomiędzy nimi są tylko litery b. Liczbę tych liter b nazwijmy odległością. Język, który mamy opisać wyrażeniem regularnym, zawiera dokładnie te słowa, w których odległość pomiędzy każdymi dwoma sąsiednimi literami a jest różna od 2. Równoważnie, nasz język zawiera te słowa w, które można podzielić na

$$w = vw_1w_2 \dots w_k u$$

tak, że $v \in b^*$, słowa $w_1, \dots, w_k \in a + ab + abbbb^*$, a słowo u to albo słowo puste, albo b. Otrzymujemy wyrażenie regularne:

$$b^*(a + ab + abbbb^*)^*(b + \varepsilon).$$

Zad. 2. Czy następujący język jest bezkontekstowy? Jeśli tak, podaj gramatykę bezkontekstową generującą ten język.

$$\{a^i\, b^k\, a^j\, b^l \;:\; i + j = k + l,\; i, j, k, l \geq 0\}.$$

Rozwiązanie. Ten język jest bezkontekstowy. Jest on generowany przez poniższą gramatykę (symbol startowy S):

$$\begin{array}{lcl} S & \to & aSb \mid S_1 \\ S_1 & \to & ABA \\ A & \to & aAb \mid \varepsilon \\ B & \to & bBa \mid \varepsilon \end{array}$$

Z symbolu A generowany jest język $\{a^ib^i \mid i \geq 0\}$, podobnie z symbolu B, język $\{b^ia^i \mid i \geq 0\}$. Stąd łatwo widzieć, że z symbolu S_1 generowany jest język

$$\{a^ib^ib^ja^ja^kb^k \mid i, j, k \geq 0\} = \{a^ib^ja^kb^l \mid i+k = j+l, i \leq j, \text{ oraz } i, j, k, l \geq 0\},$$

zaś z symbolu S język

$$\{a^{i+r}b^ja^kb^{l+r} \mid i + k = j + l, i \leq j, \text{ oraz } i, j, k, l, r \geq 0\},$$

który równy jest oczekiwanemu językowi.

Zad. 3. Czy następujący język jest bezkontekstowy? Jeśli tak, podaj gramatykę bezkontekstową generującą ten język.

$$\{a^i\, b^k\, a^j\, b^k \;:\; i + j = 2k,\; i, j, k \geq 0\}.$$

Rozwiązanie. Ten język nie jest bezkontekstowy, co można pokazać za pomocą lematu o pompowaniu dla języków bezkontekstowych. Rozważmy słowo $w = a^N b^N a^N b^N$ oraz jego dekompozycję $v_1 w_1 u w_2 v_2$ z lematu o pompowaniu. Wiemy, że $|w_1 u w_2| < N$, zatem podsłowo $w_1 u w_2$ znajduje się (a) w całości w którymś z bloków a^N lub b^N albo (b) na pograniczu bloków a^N, b^N w podsłowie $a^N b^N$ lub $b^N a^N$. Jeśli zajdzie którakolwiek sytuacja typu (a), to pompowanie sprawi, że powiększy się tylko jedna strona równości $i+j = 2k$, a co za tym idzie słowo wynikowe nie będzie mogło należeć do zadanego języka. Jeśli zajdzie sytuacja typu (b), to przejście z liter a na b nie może znaleźć się ani w słowie w_1, ani w słowie w_2, gdyż wtedy pompowanie zaburzy strukturę co najwyżej trzech zmian rodzaju litery w słowie w. Zatem przejście z a na b musi nastąpić w słowie u. Jeśli teraz zachowamy równość długości bloków liter b w w, to pompowanie może się odbywać tylko w ramach bloku liter a. Jednak takie pompowanie sprawi, że w równości z definicji języka strona $i+j$ stanie się większa od strony $2k$, co sprawi, że równość nie będzie spełniona. Zatem każde potencjalne pompowanie takiego słowa wyprowadza nas poza zadany język, a zatem język nie może być bezkontekstowy.

Zad. 4. Czy zbiór wszystkich słów synchronizujących skończonego automatu deterministycznego jest regularny? Słowo w jest synchronizujące, jeśli zbiór

$$\{\delta(q, w) \ : \ q \in Q\}$$

jest jednoelementowy (czyli niezależnie od stanu, w którym automat wystartuje, po przeczytaniu w znajdzie się w jednym i tym samym stanie).

Rozwiązanie. Tak, zbiór słów synchronizujących skończonego automatu deterministycznego jest regularny. Niech $\mathcal{A} = \langle \Sigma, Q, I, F, \delta \rangle$ będzie wyjściowym skończonym automatem deterministycznym. Język słów synchronizujących dla tego automatu rozpoznamy następującym automatem deterministycznym:

$$\mathcal{A}_s = \langle \Sigma, Q_s, I_s, F_s, \delta_s \rangle,$$

gdzie

- $Q_s = P(Q)$,
- $I_s = \{Q\}$,

- $F_s = \{\{q\} \mid q \in Q\}$,
- δ_s to zbiór przejść postaci $A \xrightarrow{a} B$, przy czym

$$B = \{q \in Q \mid \text{ istnieje } q' \in A, \text{ takie że } q' \xrightarrow{a} q \text{ jest w } \delta\}.$$

Łatwo pokazać przez indukcję po długości słowa w, że zachodzi warunek:

$$\delta_s(Q, w) = \{\delta(q, w) \mid q \in Q\}.$$

Z tego łatwo zaobserwujemy, że jeśli słowo w jest synchronizujące, to $\{\delta(q, w) \mid q \in Q\}$ jest jednoelementowy, a zatem należy do F_s i jest akceptowane przez $\mathcal{A}_s$. Z kolei, jeśli słowo w jest akceptowane przez $\mathcal{A}_s$, to $\delta_s(Q, w) \in F_s$, a tam są tylko zbiory jednoelementowe. Stąd słowo w musi być synchronizujące.