Języki, automaty i obliczenia

Wykład 8: Automaty ze stosem

Sławomir Lasota

Uniwersytet Warszawski

15 kwietnia 2015

Plan

1. Automaty ze stosem
2. Warianty automatów ze stosem
3. Równoważność gramatyk bezkontekstowych i automatów ze stosem
4. Deterministyczne automaty ze stosem

Automat ze stosem $=$ automat skończony $+$ stos

Automat ze stosem

Automat ze stosem:
$$\mathcal{A} = (A, Q, q_0, F, S, s_0, \delta)$$

- A – alfabet wejściowy
- Q – zbiór stanów
- $q_0 \in Q$ – stan początkowy
- $F \subseteq Q$ – stany akceptujące
- S – alfabet stosowy
- $s_0 \in S$ – symbol początkowy
- $\delta \subseteq Q \times S \times (A \cup \{\varepsilon\}) \times Q \times S^*$ – skończony zbiór przejść

Notacja

Przejście $(q, s, a, q', w) \in \delta$ będziemy zapisywać jako

$$q, s, a \longrightarrow q', w \quad \text{albo} \quad q, s \xrightarrow{a} q', w.$$

Przejście $q, s \xrightarrow{a} q', w$:

- umożliwione jest w stanie q, jeśli na szczycie stosu jest symbol s
- czyta z wejścia $a \in A \cup \{\varepsilon\}$
- zmienia stan z q na q'
- zastępuje na stosie symbol s przez w

Konfiguracje

- *Konfiguracja* automatu ze stosem

$$c \;=\; (q, v) \in Q \times S^*$$

- Konfiguracja początkowa: $c_0 \;=\; (q_0, s_0)$.
- Konfiguracje akceptujące: $(q, v), \quad q \in F$.

- Relacja przejścia pomiędzy konfiguracjami:

$$c \xrightarrow{a} c' \qquad (a \in A \cup \{\varepsilon\})$$

jeśli $q, s \xrightarrow{a} q', w, \quad c = (q, s\, v), \;\; c' = (q', w\, v)$ dla pewnego $v \in S^*$

- Rozszerzamy relację przejścia (bieg automatu na słowie w):

$$c \xrightarrow{w} c' \qquad (w \in A^*)$$

jeśli

$$c \xrightarrow{a_1} c_1 \xrightarrow{a_1} \ldots \xrightarrow{a_m} c_m \;=\; c'$$

dla $a_1, \ldots, a_m \in A \cup \{\varepsilon\}$ t.że $a_1\, a_2\, \ldots a_m \;=\; w$ (ale niekoniecznie $m \;=\; |w|$).

Język rozpoznawany przez automat ze stosem

$$L(\mathcal{A}) \;=\; \{w \in A^* \;:\; c_0 \xrightarrow{w} c \text{ dla jakiejś konfiguracji akceptującej } c\}$$

Przykład

Automat ze stosem $\mathcal{A}$:

- $A \;=\; \{a, b\}$
- $Q \;=\; \{q_0, q_a, q_b, q_f\}$
- $F \;=\; \{q_f\}$
- $S \;=\; \{s_0, a\}$

$$q_0, s_0 \xrightarrow{\varepsilon} q_f, \varepsilon \qquad q_a, a \xrightarrow{a} q_a, aa \qquad q_b, a \xrightarrow{b} q_b, \varepsilon$$

$$q_0, s_0 \xrightarrow{a} q_a, as_0 \qquad q_a, a \xrightarrow{b} q_b, \varepsilon \qquad q_b, s_0 \xrightarrow{\varepsilon} q_f, \varepsilon$$

$L(\mathcal{A}) \;= ?$

Plan

Warianty

- operacje na stosie: push, pop, top
- przepisywanie prefiksowe
- akceptacja przez pusty stos
- akceptacja przez pusty stos i stan akceptujący
- jeden stan $=$ brak stanów
- brak pustych przejść
- brak pustych przejść i brak stanów
- . . .

Operacje na stosie: push, pop, nop

$$\delta \subseteq Q \times \boxed{\{\mathrm{push}(s), \mathrm{pop}(s), \mathrm{nop} \;:\; s \in S\}} \times (A \cup \{\varepsilon\}) \times Q$$

$(q, \mathrm{push}(s), a, q')$	$q, r \xrightarrow{a} q', s\,r$	$(r \in S)$
$(q, \mathrm{pop}(s), a, q')$	$q, s \xrightarrow{a} q', \varepsilon$	
(q, nop, a, q')	$q, r \xrightarrow{a} q', r$	$(r \in S)$

Przykład

$q_0, s_0 \xrightarrow{\varepsilon} q_f, \varepsilon$	$q_a, a \xrightarrow{a} q_a, aa$	$q_b, a \xrightarrow{b} q_b, \varepsilon$
$q_0, s_0 \xrightarrow{a} q_a, as_0$	$q_a, a \xrightarrow{b} q_b, \varepsilon$	$q_b, s_0 \xrightarrow{\varepsilon} q_f, \varepsilon$
$(q_0, \mathrm{pop}(s_0), \varepsilon, q_f)$	?	$(q_b, \mathrm{pop}(b), b, q_b)$
?	$(q_a, \mathrm{pop}(b), b, q_b)$	$(q_b, \mathrm{pop}(s_0), \varepsilon, q_f)$

$q, s \xrightarrow{a} q', s_3 s_2 s_1$

$(q, \mathrm{pop}(s), a, q_1)$
$(q_1, \mathrm{push}(s_1), \varepsilon, q_2)$
$(q_2, \mathrm{push}(s_2), \varepsilon, q_3)$
$(q_3, \mathrm{push}(s_3), \varepsilon, q')$

dodatkowe stany q_1, q_2, q_3

Skończony zbiór przejść:

$$\delta \ \subseteq \ Q \times \boxed{S^*} \times (A \cup \{\varepsilon\}) \times Q \times S^*$$

Przejście $q, w \xrightarrow{a} q', w'$:

- umożliwione jest w stanie q, jeśli na szczycie stosu jest ciąg symboli w
- czyta z wejścia $a \in A \cup \{\varepsilon\}$
- zmienia stan z q na q'
- zastępuje na stosie ciąg symboli w przez w'

Twierdzenie

(przepisywanie prefiksowe) $\equiv$ (automaty ze stosem).

Dowód:

$$q, r_3 r_2 r_1 \xrightarrow{a} q', s_2 s_1 \qquad \begin{aligned} q, r_3 &\xrightarrow{\varepsilon} q_2, \varepsilon \\ q_2, r_2 &\xrightarrow{\varepsilon} q_1, \varepsilon \\ q_1, r_1 &\xrightarrow{a} q', s_2 s_1 \end{aligned} \qquad \text{dodatkowe stany } q_1, q_2$$

Akceptacja przez pusty stos

Konfiguracje akceptujące: (q, ε), $q \in Q$

Przykład

Automat ze stosem $\mathcal{A}$:

- $A = \{a, b\}$
- $Q = \{q_0, q_a, q_b, q_f\}$
- $F = \{q_f\}$
- $S = \{s_0, a\}$

$$
\begin{array}{lll}
q_0, s_0 \xrightarrow{\varepsilon} q_f, \varepsilon & q_a, a \xrightarrow{a} q_a, aa & q_b, a \xrightarrow{b} q_b, \varepsilon \\
q_0, s_0 \xrightarrow{a} q_a, as_0 & q_a, a \xrightarrow{b} q_b, \varepsilon & q_b, s_0 \xrightarrow{\varepsilon} q_f, \varepsilon
\end{array}
$$

Twierdzenie

(automaty ze stosem) $\equiv$ *(automaty ze stosem akceptujące przez pusty stos).*

Akceptacja przez stany a akceptacja przez pusty stos

$$\mathcal{A} = (A, Q, q_0, S, s_0, \delta) \quad \longmapsto \quad \mathcal{A}' = (A, Q', q_0', F', S', s_0', \delta')$$

- $Q' = Q \cup \{q_0', q_f\}$
- $F' = \{q_f\}$
- $S' = S \cup \{s_0'\}$
- $\delta' = \delta \cup \{(q_0', s_0', \varepsilon, q_0, s_0\, s_0')\} \cup \{(q, s_0', \varepsilon, q_f, \varepsilon) : q \in Q\}$

$$\mathcal{A} = (A, Q, q_0, F, S, s_0, \delta) \quad \longmapsto \quad \mathcal{A}' = (A, Q', q_0', S', s_0', \delta')$$

- $Q' = Q \cup \{q_0', q_f\}$
- $S' = S \cup \{s_0'\}$
- $\delta' = \delta \cup \begin{array}{l} \{(q_0', s_0', \varepsilon, q_0, s_0\, s_0')\} \cup \\ \{(q, s, \varepsilon, q_f, s) : q \in F, s \in S'\} \cup \\ \{(q_f, s, \varepsilon, q_f, \varepsilon) : s \in S'\} \end{array}$

Akceptacja przez stany a akceptacja przez pusty stos

$$\mathcal{A} = (A, Q, q_0, S, s_0, \delta) \quad \longmapsto \quad \mathcal{A}' = (A, Q', q_0', F', S', s_0', \delta')$$

- $Q' = Q \cup \{q_0', q_f\}$
- $F' = \{q_f\}$
- $S' = S \cup \{s_0'\}$
- $\delta' = \delta \cup \{(q_0', s_0', \varepsilon, q_0, s_0\, s_0')\} \cup \{(q, s_0', \varepsilon, q_f, \varepsilon) : q \in Q\}$

$$\mathcal{A} = (A, Q, q_0, F, S, s_0, \delta) \quad \longmapsto \quad \mathcal{A}' = (A, Q', q_0', S', s_0', \delta')$$

- $Q' = Q \cup \{q_0', q_f\}$
- $S' = S \cup \{s_0'\}$
- $\delta' = \delta \cup \begin{array}{l} \{(q_0', s_0', \varepsilon, q_0, s_0\, s_0')\} \cup \\ \{(q, s, \varepsilon, q_f, s) : q \in F, s \in S'\} \cup \\ \{(q_f, s, \varepsilon, q_f, \varepsilon) : s \in S'\} \end{array}$

Pytanie

A automaty ze stosem akceptujące przez pusty stos i stan akceptujący ?

Plan

Automaty bez stanów

Automaty z jednym stanem $=$ automaty bez stanów (akceptacja przez pusty stos)

Automat ze stosem bez stanów:

$$\mathcal{A} = (A, S, s_0, \delta)$$

- A – alfabet wejściowy
- S – alfabet stosowy
- $s_0 \in S$ – symbol początkowy
- $\delta \subseteq S \times (A \cup \{\varepsilon\}) \times S^*$ – skończony zbiór przejść

Twierdzenie

(automaty ze stosem) $\equiv$ *(automaty ze stosem bez stanów).*

Dowód:

Niech $\mathcal{A} = (A, Q, q_0, S, s_0, \delta)$. Definiujemy $\mathcal{A}' = (A, S', s_0', \delta')$:

- $S' = Q \times S \times Q$
- $s_0' = (q_0, s_0, q)$, q – dowolny

$$s_0' = \left\langle \begin{array}{c} q_0 \\ s_0 \\ q \end{array} \right\rangle$$

Konstrukcja równoważnego automatu bez stanów

- dla każdego przejścia $q, s \xrightarrow{a} p, \varepsilon \in \delta$, δ' zawiera przejście $(\langle q, s, p\rangle, a, \varepsilon)$.

$$\left\langle \begin{array}{c} q \\ s \\ p \end{array} \right\rangle \quad \xrightarrow{a} \quad \varepsilon$$

- dla każdego przejścia $q, s \xrightarrow{a} p, s_n s_{n-1} \ldots s_2 s_1 \in \delta$ $(n \geq 1)$, δ' zawiera przejścia

$$\langle q, s, q_1\rangle, a, \langle p, s_n, q_n\rangle\langle q_n, s_{n-1}, q_{n-1}\rangle \ldots \langle q_3, s_2, q_2\rangle\langle q_2, s_1, q_1\rangle,$$

dla dowolnych stanów $q_1, q_2, \ldots, q_n$.

$$\left\langle \begin{array}{c} q \\ s \\ p_1 \end{array} \right\rangle \quad \xrightarrow{a} \quad \begin{array}{c} \left\langle \begin{array}{c} p \\ s_n \\ q_n \end{array} \right\rangle \\ \left\langle \begin{array}{c} q_n \\ s_{n-1} \\ q_{n-1} \end{array} \right\rangle \\ \ldots \\ \left\langle \begin{array}{c} q_3 \\ s_2 \\ q_2 \end{array} \right\rangle \\ \left\langle \begin{array}{c} q_2 \\ s_1 \\ q_1 \end{array} \right\rangle \end{array}$$

Poprawność wynika z obserwacji:

$$\left\langle \begin{array}{c} q \\ s \\ p \end{array} \right\rangle \xrightarrow{w} \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad (q, s) \xrightarrow{w} (p, \varepsilon),$$

którą nietrudno dowieść przez indukcję względem długości biegu.

Twierdzenie

(automaty ze stosem) $\equiv$ *(gramatyki bezkontekstowe).*

Dowód:

Pomijamy słowo puste.

- Niech $\mathcal{A} = (A, S, s_0, \delta)$ automat ze stosem bez stanów. Definiujemy gramatykę $\mathcal{G} = (A, S, s_0, \alpha)$:

$$(s, a, w) \in \delta \iff s \longrightarrow_{\mathcal{G}} a\,w \qquad (s \in S, a \in A \cup \{\varepsilon\}, w \in S^*)$$

- Niech $\mathcal{G} = (A, N, s_0, \alpha)$ w postaci Chomskiego. Definiujemy automat bez stanów $\mathcal{A} = (A, N, s_0, \delta)$:

$$(s, \varepsilon, s_2 s_1) \in \delta \iff s \longrightarrow_{\mathcal{G}} s_2 s_1 \quad (s, s_1, s_2 \in N)$$
$$(s, a, \varepsilon) \in \delta \iff s \longrightarrow_{\mathcal{G}} a \qquad (s \in S, a \in A)$$

Pytanie

Czy (automaty ze stosem bez pustych przejść) $\equiv$ (automaty ze stosem) ?

Pytanie

Czy (automaty ze stosem bez pustych przejść) $\equiv$ (automaty ze stosem) ?

Twierdzenie

(automaty ze stosem bez pustych przejść i bez stanów) $\equiv$ *(automaty ze stosem).*

Dowód:

(automaty ze stosem bez pustych przejść i bez stanów)

$\equiv$

(gramatyki bezkontekstowe w postaci Greibach)

$\equiv$

(gramatyki bezkontekstowe)

$\equiv$

(automaty ze stosem)

Plan

Deterministyczne automaty ze stosem

Automat ze stosem $\mathcal{A} = (A, Q, q_0, F, S, s_0, \delta)$.

Niech $\delta(q, s, a) = \{(p, w) \in Q \times S^* \ : \ q, s \xrightarrow{a} p, w\}$.

Automat $\mathcal{A}$ jest *deterministyczny*, jeśli...

Automat ze stosem $\mathcal{A} = (A, Q, q_0, F, S, s_0, \delta)$.

Niech $\delta(q, s, a) = \{(p, w) \in Q \times S^* : q, s \xrightarrow{a} p, w\}$.

Automat $\mathcal{A}$ jest *deterministyczny*, jeśli... dla każdej pary $(q, s) \in Q \times S$:

- albo $|\delta(q, s, a)| = 1$ dla każdego $a \in A$, oraz $\delta(q, s, \varepsilon) = \emptyset$;
- albo $|\delta(q, s, \varepsilon)| = 1$, oraz $\delta(q, s, a) = \emptyset$ dla każdego $a \in A$.

Pytanie

Czy ten automat jest deterministyczny?

- $A = \{a, b\}$
- $Q = \{q_0, q_a, q_b, q_f\}$
- $F = \{q_f\}$
- $S = \{s_0, a\}$

$$
\begin{array}{lll}
q_0, s_0 \xrightarrow{\varepsilon} q_f, \varepsilon & q_a, a \xrightarrow{a} q_a, aa & q_b, a \xrightarrow{b} q_b, \varepsilon \\
q_0, s_0 \xrightarrow{a} q_a, as_0 & q_a, a \xrightarrow{b} q_b, \varepsilon & q_b, s_0 \xrightarrow{\varepsilon} q_f, \varepsilon
\end{array}
$$

Automat ze stosem $\mathcal{A} = (A, Q, q_0, F, S, s_0, \delta)$.

Niech $\delta(q, s, a) = \{(p, w) \in Q \times S^* : q, s \xrightarrow{a} p, w\}$.

Automat $\mathcal{A}$ jest *deterministyczny*, jeśli... dla każdej pary $(q, s) \in Q \times S$:

- albo $|\delta(q, s, a)| = 1$ dla każdego $a \in A$, oraz $\delta(q, s, \varepsilon) = \emptyset$;
- albo $|\delta(q, s, \varepsilon)| = 1$, oraz $\delta(q, s, a) = \emptyset$ dla każdego $a \in A$.

Pytanie

Czy ten automat jest deterministyczny?

- $A = \{a, b\}$
- $Q = \{q_0, q_a, q_b, q_f\}$
- $F = \{q_f\}$
- $S = \{s_0, a\}$

$$q_0, s_0 \xrightarrow{\varepsilon} q_f, \varepsilon \qquad q_a, a \xrightarrow{a} q_a, aa \qquad q_b, a \xrightarrow{b} q_b, \varepsilon$$

$$q_0, s_0 \xrightarrow{a} q_a, as_0 \qquad q_a, a \xrightarrow{b} q_b, \varepsilon \qquad q_b, s_0 \xrightarrow{\varepsilon} q_f, \varepsilon$$

Jak go zdeterminizować?

Czy potrzebne są puste przejścia?

Język

$$\{a^n\, b^m\, a^n \ :\ n, m \in \mathbb{N}\} \ \cup\ \{a^n\, b^m\, c\, b^m\, a^n \ :\ n, m \in \mathbb{N}\}$$

jest rozpoznawany przez deterministyczny automat ze stosem, ale nie przez taki automat bez pustych przejść.

Automat $\mathcal{A}$ jest *deterministyczny*, jeśli dla każdej pary $(q, s) \in Q \times S$:

- albo $|\delta(q, s, a)| = 1$ dla każdego $a \in A$, oraz $\delta(q, s, \varepsilon) = \emptyset$;
- albo $|\delta(q, s, \varepsilon)| = 1$, oraz $\delta(q, s, a) = \emptyset$ dla każdego $a \in A$.

Pytanie

Czy (języki regularne) $\subseteq$ (deterministyczne języki bezkontekstowe) ?

Automat $\mathcal{A}$ jest *deterministyczny*, jeśli dla każdej pary $(q, s) \in Q \times S$:

- albo $|\delta(q, s, a)| = 1$ dla każdego $a \in A$, oraz $\delta(q, s, \varepsilon) = \emptyset$;
- albo $|\delta(q, s, \varepsilon)| = 1$, oraz $\delta(q, s, a) = \emptyset$ dla każdego $a \in A$.

Pytanie

Czy (języki regularne) $\subseteq$ (deterministyczne języki bezkontekstowe) ?

Pytanie

Czy automat deterministyczny $\mathcal{A}$ ma dokładnie jeden bieg akceptujący na każdym słowie $w \in L(\mathcal{A})$?

Deterministyczne języki bezkontekstowe

Automat $\mathcal{A}$ jest *deterministyczny*, jeśli dla każdej pary $(q, s) \in Q \times S$:

- albo $|\delta(q, s, a)| = 1$ dla każdego $a \in A$, oraz $\delta(q, s, \varepsilon) = \emptyset$;
- albo $|\delta(q, s, \varepsilon)| = 1$, oraz $\delta(q, s, a) = \emptyset$ dla każdego $a \in A$.

Pytanie

Czy (języki regularne) $\subseteq$ (deterministyczne języki bezkontekstowe) ?

Pytanie

Czy automat deterministyczny $\mathcal{A}$ ma dokładnie jeden bieg akceptujący na każdym słowie $w \in L(\mathcal{A})$?

Pytanie

Czy odpowiedź zmienia się, jeśli automat akceptuje przez pusty stos ?

Automat $\mathcal{A}$ jest *deterministyczny*, jeśli dla każdej pary $(q, s) \in Q \times S$:

- albo $|\delta(q, s, a)| = 1$ dla każdego $a \in A$, oraz $\delta(q, s, \varepsilon) = \emptyset$;
- albo $|\delta(q, s, \varepsilon)| = 1$, oraz $\delta(q, s, a) = \emptyset$ dla każdego $a \in A$.

Pytanie

Czy (języki regularne) $\subseteq$ (deterministyczne języki bezkontekstowe) ?

Pytanie

Czy automat deterministyczny $\mathcal{A}$ ma dokładnie jeden bieg akceptujący na każdym słowie $w \in L(\mathcal{A})$?

Pytanie

Czy odpowiedź zmienia się, jeśli automat akceptuje przez pusty stos ?

Pytanie

Czy (deterministyczne automaty ze stosem) $\equiv$ (deterministyczne automaty ze stosem akceptujące przez pusty stos) ?

Języki deterministyczne są jednoznaczne

Twierdzenie

(deterministyczne języki bezkontekstowe) $\subseteq$ *(jednoznaczne języki bezkontekstowe).*

Dowód:

Niech L rozpoznawany przez deterministyczny automat ze stosem.

$L\$$ jest rozpoznawany przez deterministyczny automat ze stosem akceptujący przez pusty stos.

$L\$$ jest rozpoznawany przez *niedeterministyczny* automat ze stosem bez stanów, który ma co najwyżej jeden bieg akceptujący dla każdego akceptowanego słowa.

$L\$$ jest generowany przez jednoznaczną gramatykę bezkontekstową.

L jest generowany przez jednoznaczną gramatykę bezkontekstową.

Przykład

Języki

$$\{w\, w^R \ : \ w \in \{a,b\}^*\} \qquad\qquad \{a^n\, b^n \ : \ n \in \mathbb{N}\} \ \cup \ \{a^n\, b^{2n} \ : \ n \in \mathbb{N}\}$$

są jednoznaczne, ale nie deterministyczne.

Równość deterministycznych języków bezkontekstowych

Problem równości

Dane:	języki bezkontekstowe L, M
Wynik:	czy $L = M$?

Twierdzenie (Sénizergues 1997)

Problem równości deterministycznych języków bezkontekstowych jest rozstrzygalny.

W następnym odcinku:

- pompowanie języków bezkontekstowych
- własności domknięcia
- obrazy przemienne języków bezkontektowych są semiliniowe