Języki, automaty i obliczenia

Wykład 5: Wariacje na temat automatów skończonych

Sławomir Lasota

Uniwersytet Warszawski

25 marca 2015

Plan

Automaty dwukierunkowe

(Niedeterministyczny) *automat dwukierunkowy* $\mathcal{A} = (A, \vdash, \dashv, Q, I, F, \delta)$

$$\boxed{\delta \subseteq Q \times (A \cup \{\vdash, \dashv\}) \times Q \times \{-1, 0, 1\}}$$

$(q, a, q', k) \in \delta$: czytaj a, zmień stan z q na q', zmień pozycję o k

Ustalmy słowo wejściowe $w \in A^*$, niech $n = |w|$.

Konfiguracja automatu $\mathcal{A}$ na słowie w to para $(q, i) \in Q \times \{0 \dots n+1\}$

$$\longleftarrow \qquad q \qquad \longrightarrow$$
$$\nabla$$

$\vdash$	a	b	a	a	b	a	b	$\dashv$
0	1	...		i			n	n+1

- konfiguracje początkowe $I \times \{1\}$
- konfiguracje akceptujące $F \times \{n+1\}$

Zabraniamy przejść postaci

$$(q, \vdash, q', -1) \qquad (q, \dashv, q', 1),$$

czyli: $\delta \cap (Q \times \{\vdash\} \times Q \times \{-1\} \cup Q \times \{\dashv\} \times Q \times \{1\}) = \emptyset$

Przykład

Pytanie

Jaki język rozpoznaje ten automat dwukierunkowy?

- $A = \{a, b\}$
- $Q = \{q_0, q_1, q_2, p_1, p_2, a, r\}$
- $I = \{q_0\}$
- $F = \{a\}$

	$\vdash$	a	b	$\dashv$
q_0	$(q_0, +1)$	$(q_1, +1)$	$(q_0, +1)$	$(p_0, -1)$
q_1		$(q_2, +1)$	$(q_1, +1)$	$(r, -1)$
q_2		$(q_0, +1)$	$(q_2, +1)$	$(r, -1)$
p_0	$(a, +1)$	$(p_0, -1)$	$(p_1, -1)$	
p_1	$(r, +1)$	$(p_1, -1)$	$(p_0, -1)$	
a	$(a, +1)$	$(a, +1)$	$(a, +1)$	
r	$(r, +1)$	$(r, +1)$	$(r, +1)$	

Biegi automatu dwukierunkowego

Ustalmy automat dwukierunkowy $\mathcal{A} = (A, \vdash, \dashv, Q, I, F, \delta)$ i słowo

$$w = a_1 \dots a_n \in A^*.$$

Definiujemy relację przejścia pomiędzy *konfiguracjami* automatu $\mathcal{A}$ na słowie w.

$$(q, i) \longrightarrow (q', i+k)$$

wtw. gdy

- $1 \leq i \leq n$ oraz δ zawiera przejście (q, a_i, q', k), lub
- $i = 0$ oraz δ zawiera przejście $(q, \vdash, q', k)$, lub
- $i = n+1$ oraz δ zawiera przejście $(q, \dashv, q', k)$.

Bieg na słowie w to ciąg konfiguracji $(q_0, i_0), \dots, (q_m, i_m)$, gdzie $q_0 \in I$, $i_0 = 0$, oraz

$$(q_j, i_j) \longrightarrow (q_{j+1}, i_{j+1}), \qquad \text{dla } j = 0, \dots, m-1.$$

Bieg jest akceptujący jeśli $q_m \in F$ oraz $i_m = n+1$.

Pytanie

Jak długi może być bieg automatu dwukierunkowego na słowie w ?

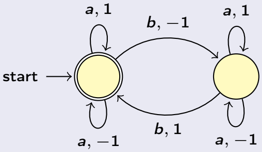
Język automatu dwukierunkowego

Język rozpoznawany przez $\mathcal{A}$:

$$L(\mathcal{A}) \;=\; \{w \in A^* \;:\; \mathcal{A} \text{ ma bieg akceptujący na } w\}.$$

Pytanie

Jaki język rozpoznaje ten automat dwukierunkowy?

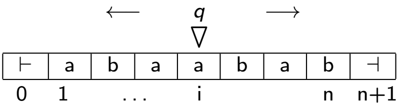


($\vdash$, $\dashv$ nieużywane)

Pytanie

Czy automaty dwukierunkowe rozpoznają więcej języków niż automaty jednokierunkowe?

Automaty dwukierunkowe jako maszyny Turinga



$$
\begin{aligned}
\text{Automaty dwukierunkowe} \quad &= \quad \text{maszyny Turinga ze stałą pamięcią} \\
&= \quad \text{maszyny Turinga z taśmą wejściową tylko do odczytu,} \\
& \text{bez taśmy roboczej}
\end{aligned}
$$

Deterministyczne automaty dwukierunkowe

Automat dwukierunkowy $\mathcal{A} = (A, \vdash, \dashv, Q, I, F, \delta)$ jest *deterministyczny*, jeśli relacja przejścia jest funkcją:

$$\delta : Q \times A \to Q \times \{-1, 0, 1\}$$

	$\vdash$	a	b	$\dashv$
q_0	$(q_0, +1)$	$(q_1, +1)$	$(q_0, +1)$	$(p_0, -1)$
q_1		$(q_2, +1)$	$(q_1, +1)$	$(r, -1)$
q_2		$(q_0, +1)$	$(q_2, +1)$	$(r, -1)$
p_0	$(a, +1)$	$(p_0, -1)$	$(p_1, -1)$	
p_1	$(r, +1)$	$(p_1, -1)$	$(p_0, -1)$	
a	$(a, +1)$	$(a, +1)$	$(a, +1)$	
r	$(r, +1)$	$(r, +1)$	$(r, +1)$	

Pytanie

Ile stanów musi mieć deterministyczny automat dwukierunkowy dla języka

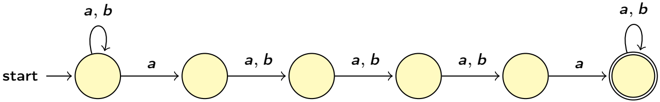
$$L_n = A^* \, a \, A^{n-1}?$$

Deterministyczne automaty dwukierunkowe (c.d.)

Pytanie

Ile stanów musi mieć deterministyczny automat dwukierunkowy dla języka

$$L_n \;=\; A^*\, a\, A^{n-1}\, a\, A^*?$$

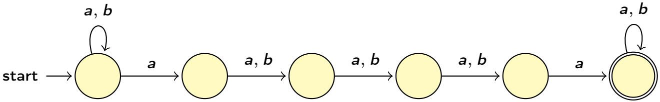


Deterministyczne automaty dwukierunkowe (c.d.)

Pytanie

Ile stanów musi mieć deterministyczny automat dwukierunkowy dla języka

$$L_n \;=\; A^* \, a \, A^{n-1} \, a \, A^* ?$$



Odpowiedź

```
idź w prawo do pierwszej a
idź n kroków w prawo
jeśli a to akceptuj
w.p.p.
    idź n−1 kroków w lewo
    kontynuuj od pierwszej instrukcji

wyjątek:  jeśli ⊣ to odrzuć
```

Pytanie

Czy automaty dwukierunkowe rozpoznają więcej języków niż automaty jednokierunkowe?

Pytanie

Czy automaty dwukierunkowe rozpoznają więcej języków niż automaty jednokierunkowe?

Twierdzenie (Rabin, Scott 1959, Shepardson 1959)

Automaty dwukierunkowe rozpoznają języki regularne.

Dowód (Vardi 1989):

Niech $\mathcal{A} = (A, \vdash, \dashv, Q, I, F, \delta)$ automat dwukierunkowy.

Fakt

$w = a_1 \dots a_n \notin L(\mathcal{A})$ *wtw. gdy* $\exists P_0, P_1, \dots, P_{n+1}$ *t.że*

- $I \subseteq P_1$
- $F \cap P_{n+1} = \emptyset$
- $\forall i \in \{0 \dots n+1\}.\ (q, a_i, q', k) \in \delta \ \wedge \ q \in P_i \implies q' \in P_{i+k}$

$(a_0 = \vdash,\ a_{n+1} = \dashv)$

P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8
$\vdash$	a	b	a	a	b	a	b	$\dashv$

Dowód (c.d.):

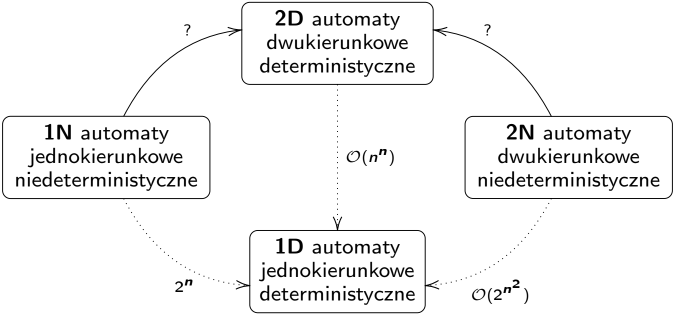
Definiujemy niedeterministyczny automat jednokierunkowy $\mathcal{A}'$:

- $Q' = \mathcal{P}(Q) \times \mathcal{P}(Q)$
- $I' = \{(P, P') : \begin{array}{l} I \subseteq P' \\ \forall q \in P, p \in Q.\ (q, \vdash, p, 0) \in \delta \implies p \in P \\ \forall q \in P, p \in Q.\ (q, \vdash, p, 1) \in \delta \implies p \in P'\} \end{array}$
- $F' = \{(P, P') : \begin{array}{l} P' \cap F = \emptyset \\ \forall q' \in P', p \in Q.\ (q', \dashv, p, 0) \in \delta \implies p \in P' \\ \forall q' \in P', p \in Q.\ (q', \dashv, p, -1) \in \delta \implies p \in P\} \end{array}$
- $\delta' = \{((P, P'), a, (P', P'')) : \begin{array}{l} \forall q' \in P', p \in Q.\ (q', a, p, -1) \in \delta \implies p \in P \\ \forall q' \in P', p \in Q.\ (q', a, p, 0) \in \delta \implies p \in P' \\ \forall q' \in P', p \in Q.\ (q', a, p, 1) \in \delta \implies p \in P''\} \end{array}$

Z faktu z poprzedniego slajdu wynika:

$$w \in L(\mathcal{A}') \iff w \notin L(\mathcal{A})$$

Determinizacja



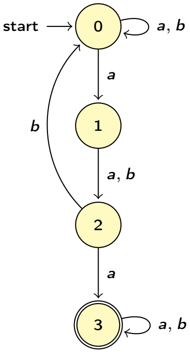
Plan

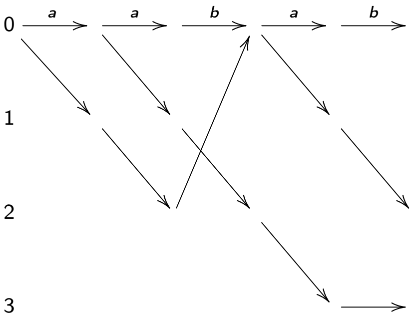
Niedeterminizm $= \exists$

$A = \{a, b\}^*$

$L_n \; = \; A^* a\, A\, a\, A^*$

$w = aabab$

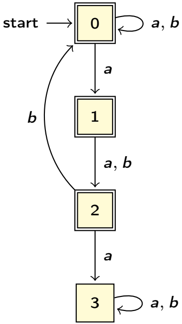


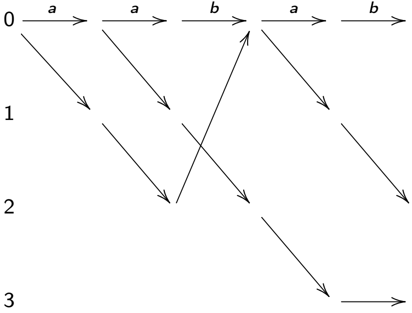


$A = \{a, b\}^*$

$A^* - L_n$

$w = aabab$

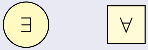


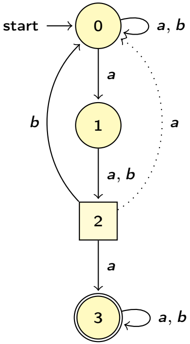


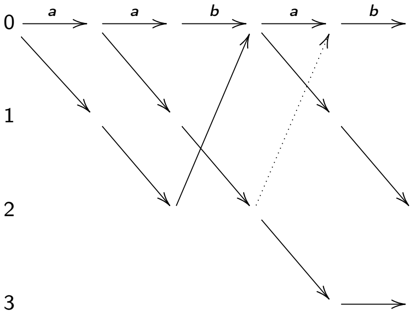
Alternacja

Notacja

Stany egzystencjalne i uniwersalne:







Automat alternujący

$$\mathcal{A} \;=\; (A, Q_\exists, Q_\forall, q_0, F, \delta), \qquad Q_\exists \cap Q_\forall = \emptyset, \qquad Q \;=\; Q_\exists \cup Q_\forall$$

Zakładamy, że dla każdego $q \in Q$ i $a \in A$, istnieje $p \in Q$ t.że $(q, a, p) \in \delta$.

Ustalmy słowo wejściowe $w \;=\; a_1 \dots a_n \in A^*$.

Gra o akceptację $\mathcal{G}_{\mathcal{A},w}$:

- gracze: Automat, Przeciwnik
- pozycje Automatu: $Q_\exists \times \{0 \dots n\}$
- pozycje Przeciwnika: $Q_\forall \times \{0 \dots n\}$
- pozycja początkowa: $(q_0, 0)$
- ruch $(q, i-1) \longrightarrow (q', i)$ jeśli $(q, a_i, q') \in \delta$
- Automat wygrywa, gdy gra osiągnie pozycję (q, n), gdzie $q \in F$

Język rozpoznawany przez automat $\mathcal{A}$:

$$L(\mathcal{A}) \;=\; \{w \in A^* \;:\; \text{Automat ma strategię wygrywającą w grze } \mathcal{G}_{\mathcal{A},w}\}$$

Język rozpoznawany przez automat $\mathcal{A}$:

$$L(\mathcal{A}) \;=\; \{w \in A^* \;:\; \text{Automat ma strategię wygrywającą w grze } \mathcal{G}_{\mathcal{A},w} \text{ z } (q_0, 0)\}$$

Automat ma strategię wygrywającą w $\mathcal{G}_{\mathcal{A},w}$ z (q, n) wtw. gdy $q \in F$

$$W^n_{\mathcal{A},w} \;=\; F$$

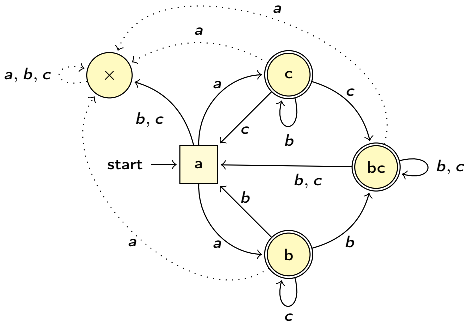
Automat ma strategię wygrywającą w $\mathcal{G}_{\mathcal{A},w}$ z $(q, i-1)$ wtw. gdy

- $q \in Q_\exists$ i istnieje $p \in Q$ t.że $(q, a_i, p) \in \delta$ i Automat ma strategię wygrywającą w $\mathcal{G}_{\mathcal{A},w}$ z (p, i), albo
- $q \in Q_\forall$ i dla każdego $p \in Q$ t.że $(q, a_i, p) \in \delta$, Automat ma strategię wygrywającą w $\mathcal{G}_{\mathcal{A},w}$ z (p, i)

$$\begin{aligned} W^{i-1}_{\mathcal{A},w} \;&=\{q \in Q_\exists \;:\; \exists p \in Q.\ (q, a_i, p) \in \delta \;\wedge\; p \in W^i_{\mathcal{A},w}\} \;\cup \\ &\{q \in Q_\forall \;:\; \forall p \in Q.\ (q, a_i, p) \in \delta \implies p \in W^i_{\mathcal{A},w}\} \end{aligned}$$

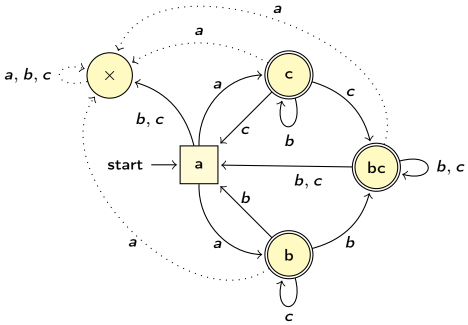
$$L(\mathcal{A}) \;=\; \{w \in A^* \;:\; q_0 \in W^0_{\mathcal{A},w}\}$$

Przykład



Pytanie

Czy $abbca \in L(\mathcal{A})$? Jaki język rozpoznaje ten automat?



Pytanie

Czy $abbca \in L(\mathcal{A})$? Jaki język rozpoznaje ten automat?

Odpowiedź

$\big(a(LbL \cap LcL)\big)^* aL$, gdzie $L = (b+c)^*$

Pytanie

Jak przerobić automat alternujący $\mathcal{A}$ na automat rozpoznający język $A^* - L(\mathcal{A})$?

Pytanie

Jak przerobić automat alternujący $\mathcal{A}$ na automat rozpoznający język $A^* - L(\mathcal{A})$?

Pytanie

Czy automaty alternujące rozpoznają więcej języków niż automaty niedeterministyczne?

Twierdzenie

Automaty alternujące rozpoznają języki regularne.

Dowód:

Niech $\mathcal{A} = (A, Q_\exists, Q_\forall, q_0, F, \delta)$ automat alternujący.

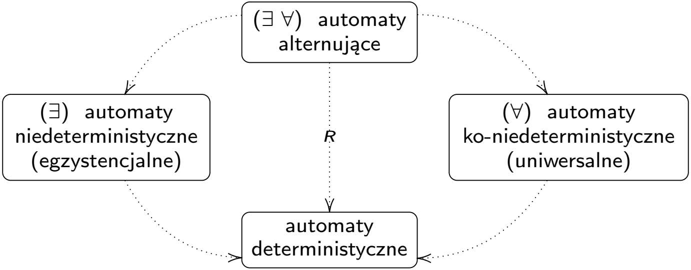
Konstruujemy automat niedeterministyczny $\mathcal{A}' = (A, Q', I', F', \delta')$:

- $Q' = \mathcal{P}(Q)$
- $I' = \{X \subseteq Q \ : \ q_0 \in X\}$
- $F' = \mathcal{P}(F)$
- $(X, a, Y) \in \delta'$ wtw. gdy

$$\begin{aligned} X = & \{q \in Q_\exists \ : \ \exists p \in Q.\ (q, a, p) \in \delta \ \wedge \ p \in Y\} \cup \\ & \{q \in Q_\forall \ : \ \forall p \in Q.\ (q, a, p) \in \delta \implies p \in Y\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w \in L(\mathcal{A}) \iff q_0 \in W^0_{\mathcal{A},w} \iff (W^0_{\mathcal{A},w}, w, W^n_{\mathcal{A},w}) \in \widehat{\delta}' \iff \\ \exists X \in I', Y \in F'.\ (X, w, Y) \in \widehat{\delta}' \iff w \in L(\mathcal{A}') \end{aligned}$$

Automaty alternujące a języki regularne



Fakt

Automat $(\mathcal{A}')^R$ *jest deterministyczny.*

W następnym odcinku:

- minimalizacja automatów niedeterministycznych
- automaty na drzewach

czyli... prima aprilis!