Problemy Decyzyjne dla Systemów Nieskończonych

Ćwiczenia 8

13 kwietnia 2012

Na tych ćwiczeniach zajmowaliśmy zbiorami semilinowymi i logikę Presburgera.

1. Pokaż, że zbiory semiliniowe są zamknięte na przecięcie.

Wskazówki

- wystarczy dla zbiorów liniowych
- niech $S_1 = c + \mathbb{N}d_1 + \ldots + \mathbb{N}d_k$, $S_2 = c' + \mathbb{N}d'_1 + \ldots + \mathbb{N}d'_m$
- intuicyjnie wystarczy pokazać, że zbiór indeksów (tzn. współczynników przy d_i lub d'_i) jest semilinowy
- niech $A = \{(i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_m) : c + i_1 d_1 + \ldots + i_k d_k = c' + j_1 d'_1 + \ldots + j_m d'_m\}$, wystarczy pokazać, że A jest semilinowy
- idea: weźmy minimalne punkty z A, oznaczmy jako P
- pytanie: czy P jest skończony
- tak: z lematu Dicksona
- czyli weźmiemy jako punkty bazowe naszego zbioru semiliniowego punkty z P
- skąd wziąć okresy
- zdefiniujmy zbiór różnic elementu zbioru A, czyli zbiór $B = \{(i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_m) : i_1 d_1 + \ldots + i_k d_k = j_1 d'_1 + \ldots + j_m d'_m\}$ z punktami minimalnymi R
- R będą okresami (we wszystkich zbiorach liniowych)
- niech $S(P, R)$ to zbiór o $|P|$ zbiorach liniowych, bazy są z P a w każdym ze zbiorów liniowych okresy są z R, pokażemy, że $S(P, R) = A$
- $S(P, R) \subseteq A$, to jasne, bo dodając elementy z R do elementów z P nie wyjdziemy z A
- pytanie, czy $S(P, R) \supseteq A$, czyli, czy dojdziemy w ten sposób do wszystkich elementów z A
- weźmy $a \in A$, albo $a \in P$, wtedy OK, albo istnieje $a' \in P$ taki, że $a' \leqslant a$ (po wszystkich współrzędnych)

- wtedy $a' - a \in B$, wystarczy pokazać, że da się to przedstawić jako sumę elementów z R, pokażemy, że całe B da się tak przedstawić

- przypuśćmy przeciwnie, niech $b \in B$ to minimalny element w B nie dający się przedstawić jako suma elementów z R. Wówczas istnieje $b' \leqslant b$ taki, że $b' \in R$. Jednak również $b - b' \in B$, a skoro $b - b' \leqslant b$, to daje się przedstawić jako suma elementów z R. Zatem $b = (b - b') + b'$ również daje się przedstawić jako suma elementów z R, sprzeczność.

2. Pokazać, że $FO(+, =) = FO(+, =, <, \equiv_m, 0, 1)$, czyli, że operacje z prawej strony są wyrażalne w logice pierwszego rzędu przed jedynie dodawanie i równość. Tę logikę nazywamy logiką Presburgera.

Rozwiązanie

- $x \leqslant y \iff \exists_z x + z = y$
- $zero(x) \iff x + x = x$
- $x < y \iff (x \leqslant y) \wedge \neq (x = y)$
- $one(x) \iff \forall_z (z < x) \to zero(z)$
- $x \equiv_m y \iff \exists_z x = y + \underbrace{z + \ldots + z}_{m} \vee y = x + \underbrace{z + \ldots + z}_{m}$ dla ustalonego m
- $x \cdot m = \underbrace{x + \ldots + x}_{m}$ dla ustalonego m

3. Pokaż, że zbiory semiliniowe = zbiory definiowalne w logice Presburgera.

Rozwiązanie To ma długi dowód, który ciągnął się do końca ćwiczeń i nie zakończył (choć chyba było jasne jaka jest jego struktura). Na następnych (9-tych) ćwiczeniach próbowaliśmy uprościć go nieco co się nie udało. Dowód był wzięty z artykułu: Ą New Proof of a Theorem by Ginsburg and Spanier"Marcus Kracht, 2002, łatwy do znalezienia w googlach.