Problemy Decyzyjne dla Systemów Nieskończonych

Ćwiczenia 7

30 marca 2012

Na tych ćwiczeniach zajmowaliśmy się redukcjami pomiędzy problemami w sieciach Petriego oraz nieco zbiorami semilinowymi.

1. Pokaż, że zbiory semiliniowe w $\mathbb{N}$ i zbiory ostatecznie okresowe w $\mathbb{N}$ to to samo (patrz zadanie 2 z ćwiczeń 6).

Wskazówki

- to, co zostało z zeszłych ćwiczeń, to fakt, że zbiór semiliniowy jest ostatecznie okresowy
- łatwo zobaczyć, że suma zbiorów ostatecznie okresowych jest ostatecznie okresowa (okres jest iloczynem okresów lub ewentualnie mniejszy)
- zatem wystarczy tę implikację pokazać dla zbioru liniowego
- rozważmy zbiór liniowy $\{a + b_1 n_1 + \ldots + b_k n_k : n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}\}$
- wystarczy pokazać przy założeniu $a = 0$
- można wszystkie b_i podzielić przez NWD, czyli wystarczy pokazać fakt dla $NWD(b_1, b_2, \ldots, b_k) = 1$
- nazwijmy ten zbiór S, będziemy chcieli pokazać, że wszystkie elementy od pewnego momentu należą do S
- jeśli $x \in S$, to $x + kb_1 \in S$ dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$, zatem wystarczy pokazać, że dla każdej reszty $r \in \{0, \ldots, b_1 - 1\}$ istnieje $x_r \in S$ taki, że $x_r \equiv r \mod b_1$
- wówczas wszystkie liczby naturalne większe od $\max(x_0, x_1, \ldots, x_{b_1-1})$ będą należeć do S
- wiemy (z faktu z teorii liczb), że istnieją liczby $a_i \in \mathbb{Z}$ takie, że $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_i b_i = 1$
- niech a będzie najmniejszą wielokrotnością b_1 większą od $|a_i|$ dla każdego i, wówczas $a + a_i \in \mathbb{N}$
- mamy zatem $(a + a_1)b_1 + (a + a_2)b_2 + \ldots + (a + a_i)b_i = kb_i + 1$, mnożąc stronami przez r otrzymujemy $x_r = r((a+a_1)b_1+(a+a_2)b_2+\ldots+(a+a_i)b_i)$

Zauważmy, że tego faktu wynika prosto, że zbiory semiliniowe w $\mathbb{N}$ są zamknięte na operacje boolowskie. To jest również prawdziwe dla zbiorów semiliniowych w $\mathbb{N}^k$, ale już nie tak prosto tego dowieść, będzięmy może pokazywać.

2. Pokaż, że dla danej sieci Petriego i markowania początkowego M_0 rozstrzygalny jest problem ograniczoności (tzn. czy zbiór $\{M : M_0 \rightsquigarrow M\}$ jest skończony).

Wskazówki

- robimy podobnie jak przy problemie terminacji - budujemy drzewo możliwych obliczeń
- jeśli napotkamy na jakiejś gałęzi dwie konfiguracje: M_1, a potem M_2, $M_1 \prec M_2$ (ostra nierówność!), to wiadomo, że zbiór osiągalnych konfiguracji jest nieskończony
- z WQO wiemy, że napotkamy kiedyś $M_1 \preceq M_2$, pytanie co robimy jak są równe
- jeśli $M_1 = M_2$, to ucinamy drzewo w tym miejscu, bo intuicyjnie z M_2 nie zrobimy niczego więcej niż z M_1
- widać, że algorytm się kończy: każda ścieżka jest skończona, rozgałęzienie skończone, czyli z lematu Königa drzewo jest skończone
- jeśli napotkaliśmy gdzieś $M_1 \prec M_2$ to zbiór osiągalny jest oczywiście nieskończony, jeśli nie napotkaliśmy, to jest skończony (co pokażemy)
- pokażemy że jeśli nie napotkaliśmy pary $M_1 \prec M_2$, to wszystkie osiągalne konfiguracje są w drzewie
- przypuśćmy, że jest pewna konfiguracja M osiągalna z M_0, spójrzmy na najkrótszą ścieżkę $M_0 \rightsquigarrow M$
- na tej ścieżce nie ma żadnej pary $M_1 = M_2$ (bo ta ścieżka jest najkrótsza możliwa), nie ma też żadnej pary $M_1 \prec M_2$ (bo byłaby w drzewie), więc ta ścieżka po prostu jest cała w drzewie (tego rozumowania nie było na ćwiczeniach, tak naprawdę przeoczyliśmy, że było potrzebne)

3. Zredukuj problem osiągalności markowania do osiągalności markowania pustego w sieciach Petriego.

Wskazówki

- trzeba do sieci Petriego dodać pewien gadżet
- powiedzmy, że chcemy rozstrzygnąć osiągalność markowania M, dodajemy jedno nowe miejsce do sieci Petriego, nazwijmy je C (jak control) oraz jedną tranzycję t: zdejmującą M oraz 1 żeton z miejsca C
- początkowe markowanie na oryginalnych miejscach jest takie jak poprzednio, a na C ma 1 żeton

- miejsce C i 1 żeton na nim są po to, żeby tylko 1 raz dało się zdjąć M
- pokażemy teraz poprawność konstrukcji
- jeśli M było osiągalne, to teraz puste jest oczywiście osiągalne, z drugiej strony jeśli teraz puste jest osiągalne, to znaczy, że tranzycja t została wykonana dokładnie 1 raz, a więc M było osiągalne (bo wcześniejsze zdjęcie kilku żetonów nie mogło w niczym pomóc)

4. Zredukuj problem osiągalności markowania do zerowalności konkretnego miejsca w sieciach Petriego.

Wskazówki

- trzeba znów dodać pewien gadżet
- wprowadźmy nowe miejsce: liczące sumę żetonów na wszystkich innych miejscach, nazwijmy je Σ
- możemy tak zmodyfikować wszystkie tranzycje żeby niezmiennik: liczba żetonów na Σ = suma żetonów na pozostałych był zachowany
- gdy dodamy je do konstrukcji z poprzedniego ćwiczenia, to pusta konfiguracja zostanie osiągnięta w poprzedniej sieci Petriego wtedy i tylko wtedy gdy miejsce Σ będzie wyzerowane w nowej sieci Petriego

5. Zredukuj wzajemnie do siebie problemy osiągalności markowania i osiągalności blokady w sieciach Petriego. Przez blokadę rozumiemy dowolne markowanie, w którym nie można wykonać żadnej tranzycji.

Wskazówki

- najpierw redukcja z osiągalności markowania do osiągalności blokady
- wykorzystamy konstrukcję z zadania 4 dodając do niej dodatkowe gadżety
- dodajmy tranzycję pobierającą żeton z miejsca Σ i oddającą na to samo miejsce, wówczas jeżeli to miejsce nie będzie wyzerowane, to blokada nie może być osiągnięta
- nie jest jednak prawdziwa implikacja odwrotna: może być tak, że są pewne tranzycje dodające żetony, ale nie pobierające żadnych, wówczas nawet 0 żetonów na Σ nie zablokuje ich
- problem można rozwiązać trochę je modyfikując
- mianowicie do każdej takiej tranzycji dodajmy warunek, że pobiera ona jeden żeton z miejsca C, a potem oddaje w to samo miejsce

- te tranzycje są nadal wykonalne dopóki nie wykonamy t (zdejmując żeton z C), potem już nie są
- zatem blokada jest osiągalna wtedy i tylko wtedy gdy w oryginalnej sieci markowanie M było osiągalne
- zredukujmy teraz osiągalność blokady do osiągalności markowania
- zauważmy, że każda blokada jest spowodowana tym, że na pewnych miejscach jest mało żetonów
- oznaczmy maksymalną liczbę występującą w tranzycjach przez K
- możemy blokady podzielić na grupy postaci $(n_1, ?, ?, n_2, ?, n_3)$, które znaczą: na miejscu pierwszym jest dokładnie n_1 żetonów, czwartym n_2 i szóstym n_3, $n_1, n_2, n_3 \leqslant K$, na pozostałych jest dowolna liczba żetonów
- dla każdego takiego układu możemy zobaczyć, czy on jest blokadą, teraz osiągalność blokady sprowadza się do sprawdzenia oddzielnie dla każdego układu blokującego, czy jest on osiągalny
- to jednak jest równoważne pokrywalności, w tym wypadku markowania $(n_1, 0, 0, n_2, 0, n_3)$, które łatwo daje się sprowadzić do osiągalności (pozwalamy na znikanie żetonów i pytamy o osiągalność danego markowania)

Na końcu zabraliśmy się jeszcze do pokazywania zamknięcia zbiorów semiliniowych w $\mathbb{N}^k$ na operacje boolowskie, ale to dokończymy następnym razem.