Problemy Decyzyjne dla Systemów Nieskończonych

Ćwiczenia 6

23 marca 2012

Na tych ćwiczeniach zajmowaliśmy się sieciami Petriego (i VASami, gdyż to w zasadzie to samo) oraz zbiorami semiliniowymi.

1. Przez problem pokrywalności (ang. coverability) dla sieci Petriego rozumiemy pytanie, czy dla danej sieci Petriego, markowania początkowego M_0 i wskazanego markowania M istnieje markowanie M' osiągalne z M_0 takie, że $M' \succeq M$ (przez $\succeq$ rozumiemy porządek $\geqslant$ na każdej współrzędnej). Pokaż, że problem pokrywalności dla sieci Petriego jest rozstrzygalny.

Szkic rozwiązania Będziemy korzystali z podejścia zastosowanego również w zadaniu 1 z ćwiczeń 5, to znaczy konstruowaniu drzewa możliwych obliczeń. Zauważmy, że jeżeli śledzimy jakieś obliczenie i ono napotyka jakieś markowanie M_1 np. $(1, 5, 2)$, a potem jakieś większe M_2 np. $(1, 5, 4)$, to możemy też osiągnąć dowolne markowanie postaci $(1, 5, 2k)$ dla $k \geqslant 1$. Ponieważ chodzi nam o to, żeby osiągać jak największe markowania (większa wartość nigdy nam nie przeszkodzi), to będziemy to reprezentować jako $(1, 5, \omega)$ myśląc, że można w tej gałęzi obliczenia osiągnąć dowolnie dużą wartość na tej współrzędnej. Konstruujmy więc algorytm tak, żeby w takiej sytuacji zamieniał wartość na ω i szedł dalej. Gdy napotkamy znów markowanie większe od danego to znów zmieniamy na ω, np. gdy mamy $(4, 7, \omega)$, a potem $(7, 7, \omega)$, to idziemy dalej z $(\omega, 7, \omega)$. Jeżeli napotkamy dokładnie takie samo markowanie jak poprzednio, to obcinamy tę gałąź drzewa w tym momencie, bo to znaczy, że takie obliczenie nic nie wnosi do problemu osiągalności. Na każdej gałęzi po skończonym czasie albo utniemy wszystko albo dodamy dodatkową ω (bo $(\mathbb{N} \cup \{\omega\})^k$ jest WQO), a możemy ją dodać tylko tyle razy ile wynosi wymiar (czyli w tym przykładzie 3 razy). Także każda gałąź jest skończona, rozgałęzienie drzewa jest skończone, czyli z lematu Königa drzewo jest skończone. Na końcu sprawdzamy, czy któryś z węzłów drzewa pokrywa markowanie M i dostajemy odpowiedź.

Pozostaje kwestia poprawności algorytmu. Jeżeli znajdziemy w drzewie z ω-mi markowanie pokrywające M, to na pewno istnieje też rzeczywisty bieg do $M' \succeq M$. W drugą stronę implikacja jest mniej oczywista, ale da się zrobić.

Definicje

Zbiór $S \subseteq \mathbb{N}^k$ nazwiemy *liniowym* jeżeli jest postaci

$$S = \{v + n_1 \cdot v_1 + \ldots + n_l \cdot v_l : n_1, \ldots, n_l \in \mathbb{N}\}$$

dla pewnych $v, v_1, \ldots, v_l \in \mathbb{N}^k$.

Zbiór $S \subseteq \mathbb{N}^k$ nazwiemy *semiliniowym* jeżeli jest sumą skończenie wielu zbiorów liniowych.

Pojęcie zbioru semiliniowego jest bardzo ważne w teorii informatyki, można powiedzieć, że jest tym dla $\mathbb{N}^k$ czym języki regularne są dla Σ^*. Będzie też m.in. służyło do dowodu rozstrzygalności problemu osiągalności dla sieci Petriego.

Zbiór $S \subseteq \mathbb{N}$ nazwiemy *ostatecznie okresowym* jeżeli od pewnego momentu (dla dużych liczb) jego zachowanie jest okresowe.

2. Pokaż, że zbiory semiliniowe i ostatecznie okresowe w $\mathbb{N}$ to to samo.

Szkic rozwiązania Zbiór ostatecznie okresowy łatwo przedstawić jako zbiór semiliniowy. Niech taki zbiór ostatecznie okresowy S ma okres k powyżej pewnej liczby M. Dla liczb $n > M$ niech $n \in S$ wtedy i tylko wtedy, gdy reszta n modulo k zawiera się w zbiorze dozwolonych reszt $R \subseteq \{0, 1, \ldots, k-1\}$. Wówczas zbiór semilinowy jest sumą jednoelementowych zbiorów liniowych dla liczb mniejszych lub równych M oraz dla każdej dozwolonej reszty $r \in R$ zbioru liniowego postaci

$$\{n : n > M, n \equiv r \mod k\}.$$

W drugą stronę (zbiór semiliniowy $\Rightarrow$ zbiór ostatecznie okresowy) próbowaliśmy dowieść, ale nam się na razie nie udało, odłożyliśmy na nastepne ćwiczenia.

Zauważmy, że z tej reprezentacji wynika, że w $\mathbb{N}$ zbiory semiliniowe są zamknięte na operacje boolowskie (sumę, przecięcie, dopełnienie). Prawdą jest też, że zbiory semiliniowe są w ogólności zamknięte na operacje boolowskie, będziemy to być może pokazywać na następnych ćwiczeniach.

3. Pokazać, że zbiór $\{(n, 2^n) : n \in \mathbb{N}\}$ nie jest semiliniowy.

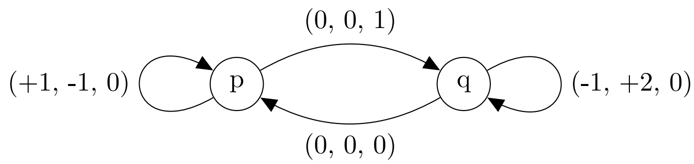
Szkic rozwiązania Wystarczy pokazać, że $\{2^n : n \in \mathbb{N}\}$ nie jest semiliniowy, bo rzuty zachowują semiliniowość. To jest jasne, bo gdyby był semiliniowy, to musiałaby być jakaś największa przerwa między jego elementami (wynikająca z maksymalnego okresu), a w zbiorze $\{2^n : n \in \mathbb{N}\}$ przerwy między elementami są dowolnie duże.

4. Pokazać, że dla danej sieci Petriego i dla danego markowania początkowego M_0 zbiór markowań osiagalnych $\{M : M_0 \rightsquigarrow M\}$ może nie być semiliniowy.

Szkic rozwiązania Idea jest taka, żeby spróbować skonstruować coś w stylu zbioru $\{(n, 2^n) : n \in \mathbb{N}\}$, oczywiście używając zmiennych pomocniczych. Zrobimy to w terminologii VASS, czyli VAS-ów ze stanami. Pomysł jest taki, żeby mnożyć liczbę na pewnym miejscu przez 2, a druga liczba będzie zliczała ile takich mnożeń wykonaliśmy. Te mnożenia możemy robić niedokładnie, to znaczy pomnożyć wszystko albo nie wszystko, czyli uzyskać zbiór

$$\{(i, n) : 0 \leqslant i \leqslant 2^n, n \in \mathbb{N}\}.$$

Przykładem takiego VASSu jest



z konfiguracją początkową $(1, 0, 0)$. Zauważmy że przy każdym cyklu $p \to q \to p$ współrzędna 3-cia zwiększa się o 1, a pierwsza współrzędna może wzrosnąć 2 razy. Także zbiór jaki powstaje na współrzędnych 1-szej i 3-ciej powiedzmy w stanie p to właśnie $\{(i, n) : 0 \leqslant i \leqslant 2^n, n \in \mathbb{N}\}$. Można wykazać, że nie jest on semiliniowy zauważając, że należą do niego punkty $(n, 2^n)$, a jeden zbiór liniowy siedzący w obszarze $\{(i, n) : 0 \leqslant i \leqslant 2^n, n \in \mathbb{N}\}$ może zawierać co najwyżej skończenie wiele z nich. Jest tak, bo taki zbiór nie może zawierać pionowego wektora w swoich okresach, a więc istnieje zawsze jakiś najbardziej pionowy, który nie zawiera punktów $(k, 2^k)$ dla dostatecznie dużych k.