Problemy Decyzyjne dla Systemów Nieskończonych

Ćwiczenia 5

16 marca 2012

Na tych ćwiczeniach robiliśmy de facto dwa zadania dotyczące zastosowania WQO w sieciach Petriego. Zajmowaliśmy się modelem w zasadzie równoważnym, czyli VASami (VAS - Vector Addition System).

Przypomnijmy, że VAS składa się ze skończonego zbioru wektorów $T = \{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq \mathbb{Z}^k$ (czyli współrzędne zmian mogą być ujemne). Przejścia VAS są postaci $v \mapsto v + v_i$, dla pewnego $1 \leqslant i \leqslant n$, gdzie zarówno v jak i $v + v_i$ należą do $\mathbb{N}^k$ (czyli współrzędne są dodatnie). Przykładowy bieg dla $T = \{(+2, -1), (-1, +3)\}$ to

$$(1,1) \mapsto (0,4) \mapsto (2,3) \mapsto (4,2).$$

1. (Problem terminacji) Dla danego VASu i danej konfiguracji początkowej (wektora) v_0 rozstrzygnij, czy istnieje bieg nieskończony.

Wskazówki

- zastanówmy się jak może wyglądać taki bieg
- z pewnością jeżeli z jakiejś konfiguracji v można niezerową liczbą ruchów dojść do niej samej to można to zapętlić i istnieje bieg nieskończony; czy można inaczej?
- jeśli z v można dojść do $v + w$ dla $w \in \mathbb{N}^k$, to też można to zapętlić; czy można inaczej?
- nie można
- ponieważ z lematu Dicksona $\mathbb{N}^k$ z porządkiem po współrzędnych jest WQO, to w każdym nieskończonym biegu istnieją konfiguracje v, $v + w$ dla $v, w \in \mathbb{N}^k$ takie, że $v + w$ występuje później niż v
- zatem algorytm jest taki: zaczynamy z v_0 i budujemy drzewo możliwych obliczeń. Jeśli trafimy na parę v i $v{+}w$ potem to odpowiadamy TAK. Jeżeli drzewo nam się skończy i nie znajdziemy takiej pary to odpowiadamy NIE.
- dlaczego to jest poprawne? dlaczego to się rzeczywiście kończy?
- czy drzewo, którego każda gałąź jest skończona jest zawsze skończone? (tzn. zawiera skończoną liczbę wierzchołków)
- niekoniecznie, któryś wierzchołek może mieć nieskończenie wiele dzieci. Może nawet być tak, że nie jest ono skończenie głębokie, bo te nieskończenie wiele dzieci mogą mieć pod sobą coraz dłuższe ścieżki

- nasze drzewo ma jednak skończone rozgałęzienie, w tej sytuacji jest skończone, co mówi lemat Königa

Lemat 1 (lemat Königa)**.** *Każde nieskończone drzewo o skończonym rozgałęzieniu ma nieskończoną ścieżkę*

Dowód. Konstruujemy tę nieskończoną ścieżkę. Wrzucamy do niej najpierw korzeń. Spójrzmy na korzeń, on ma nieskończenie wiele potomków, ale tylko skończenie wiele dzieci. Zatem któreś dziecko ma nieskończenie wiele potomków. Schodzimy do tego dziecka, wrzucamy go do ścieżki i powtarzamy konstrukcję dalej tworząc w efekcie nieskończoną ścieżkę. □

Wskazówki c.d.

- wiemy zatem, że jeżeli nie istnieje nieskończona ścieżka to nasz algorytm istotnie się zakończy zwracając przy okazji poprawną odpowiedź: NIE
- jeżeli zaś nieskończona ścieżka istnieje, to algorytm ją znajdzie i odpowie: TAK, co kończy dowód poprawności

2. Automat z kolejką (podobny do tego ze stosem) to po prostu automat skończony wyposażony dodatkowo w kolejkę, do której może w każdym ruchu coś wrzucać na koniec oraz wyjmować z początku patrząc co to jest. Takie automaty są Turing zupełne, czyli problem osiągalności dla nich jest nierozstrzygalny.

Automat stratny z kolejką to automat z kolejką który dodatkowo może wykonywać operację wykasowania elementu z kolejki (można myśleć o tym, że on to niepostrzeżenie gubi). Pokaż, że problem osiągalności dla automatu stratego z kolejką jest rozstrzygalny.

Szkic rozwiązania Ustalmy na początek: mamy konfigurację początkową s i końcową t, pytamy, czy istnieje bieg $s \rightsquigarrow t$. Użyjemy standardowego pomysłu, czyli dwóch semi-procedur: jedna będzie szukać pozytywnego świadka na osiągalność, a druga negatywnego świadka na osiągalność. Chcemy żeby były one takie, że jeżeli $s \rightsquigarrow t$, to procedura pozytywna znajdzie kiedyś świadka, a jeśli $s \not\rightsquigarrow t$ to procedura negatywna znajdzie kiedyś świadka.

Procedura pozytywna jest prosta: ona po prostu przeszukuje coraz dłuższe ścieżki wychodzące z s, jeżeli istnieje ścieżka do t, to ona ją kiedyś znajdzie.

Procedura negatywna jest trudniejsza, pierwszym pytaniem jest: co w ogóle może być potencjalnym dowodem na to, że $s \not\rightsquigarrow t$. Pomysł jest taki, że takim świadkiem/dowodem może być zbiór S spełniający następujące własności:

- $s \notin S$
- $t \in S$
- nie da się wejść do S spoza S, czyli formalnie nie istnieje tranzycja automatu umożliwiająca ruch $u \to u'$ taka, że $u \notin S$, $u \in S$

Taki zbiór nazwiemy *separatorem*. Istnienie separatora jest równoważne temu, że $s \not\rightsquigarrow t$. Istotnie, jeżeli separator istnieje, to na pewno $s \not\rightsquigarrow t$, bo wychodząc z s nigdy nie będziemy mogli wejść do separatora. Jeżeli zaś $s \not\rightsquigarrow t$ to łatwo można zdefiniować separator jako zbiór wszystkich konfiguracji, z których można osiągnąć t, czyli $S = \{u : u \rightsquigarrow t\}$. Taki zbiór nazwijmy $Pre^*(t)$, czyli powtórzmy:

$$Pre^*(t) = \{u : u \rightsquigarrow t\}.$$

Problemem jednak jest to, że nie możemy (a przynajmniej jeszcze tego nie wiemy) przeszukać wszystkich kandydatów na separatory, bo nie wiemy, czy jest ich przeliczalnie wiele. Celem końcówki rozumowania jest pokazanie, że istnieje separator o skończonej reprezentacji (będzie to $Pre^*(t)$), a więc możemy przeszukiwać wszystkie zbiory o skończonych reprezentacjach (bo jest ich przeliczalnie wiele) i w końcu znajdziemy poprawny separator.

Zauważmy, że jeżeli z jakiejś konfiguracji u możemy osiągnąć t, to z konfiguracji u' która wygląda tak jak u, tylko ma jeszcze trochę elementów w kolejce też możemy osiągnąć t. Po prostu najpierw skasujemy te dodatkowe elementy dochodząc do u, a potem dojdziemy do t. To znaczy, że zbiór $Pre^*(t)$ jest zamknięty w górę ze względu na porządek:

$$p, w \preceq q, w' \iff (p = q) \wedge (w \preceq_{hig} w')$$

gdzie przez $\preceq_{hig}$ rozumiemy porządek higmanowski na kolejkach traktowanych jako słowo. Zauważmy, że $\preceq$ jest WQO, czyli $Pre^*(t)$ zawiera tylko skończenie wiele elementów minimalnych i jest po prostu wszystkim co jest większe od tych elementów minimalnych. Zatem $Pre^*(t)$ możemy reprezentować jako zbiór elementów minimalnych, ma więc on skończoną reprezentację. To wystarcza do konstrukcji procedury negatywnej: po prostu przeszukujemy wszystkie zbiory zamknięte w górę ze względu na $\preceq$ i sprawdzamy, czy są dobrym separatorem. To zaś można sprawdzić w miarę łatwo, $s \notin S$ oraz $t \in S$ są banalne do sprawdzenia, a własność nie możności wejścia do S zawiera trochę subtelności, ale nie będziemy się tym tutaj zajmować, można samemu to przemyśleć.