Problemy Decyzyjne dla Systemów Nieskończonych

Ćwiczenia 3

2 marca 2012

Na tych ćwiczeniach kończyliśmy temat WQO i badaliśmy warianty automatów czasowych, w szczególności przyglądaliśmy się konstrukcji regionowej. Wróciliśmy do nierozwiązanych problemów z pierwszych ćwiczeń dotyczących WQO.

1. Pokażemy, że nie jest prawdą rozszerzenie lematu Higmana na nieskończone słowa. Rozważmy następujący porządek na $\mathbb{N}^2$: $(x_1, y_1) \preceq (x_2, y_2) \iff (x_1 = x_2, y_1 \leqslant y_2) \vee (x_1 < x_2, y_1 < x_2)$. Pokaż, że $(\mathbb{N}^2, \preceq)$ jest WQO oraz porządek higmanowski na nieskończonych słowach nad $\mathbb{N}^2$ indukowany przez $\preceq$ nie jest WQO.
Uwaga: dla danego porządku $(X, \leqslant_X)$ określamy na X^∞ indukowany porządek $\leqslant_{X^\infty}$ w następujący sposób: $x_1 x_2 \ldots \leqslant_{X^\infty} y_1 y_2 \ldots$ wtw. gdy istnieje funkcja rosnąca $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taka, że $x_i \leqslant_X y_{f(i)}$ dla każdego $i \in \mathbb{N}$.

Wskazówki

- najpierw udowodnijmy, że $(X, \preceq)$ jest WQO
- rozważmy ograniczoność pierwszej współrzędnej
- jeśli jest ograniczona to sprawa jest prosta, znajdujemy podciąg stały na pierwszej współrzędnej i dalej łatwo, w przeciwnym wypadku też łatwo, bo dla danej (x_1, y_1) znajdziemy w końcu dostatecznie duże x_i takie, że $x_1, y_1 < x_i$.
- teraz pokażemy, że $(X^\infty, \preceq_\infty)$ nie jest WQO
- zdefiniujmy $w_i = (i, 1), (i, 2), (i, 3), \ldots$ dla $i \geqslant 1$, pokażmy, że to jest kontrprzykład na WQO
- wystarczy pokazać, że dla dowolnych $w_i \not\preceq_\infty w_j$
- to jest prawdą, bo litera $(i, j + 1)$ znajdująca się w słowie w_i nie jest mniejsza od żadnej litery w w_j, czyli zrobione
- ten przykład został wymyślony przez Richarda Rado, tego od grafu Rado

2. Rozstrzygnąć, czy WQO przenosi się na zbiór potęgowy, czyli czy następująca implikacja zachodzi: jeśli $(X, \leqslant)$ jest WQO, to także $(\mathbb{P}(X), \leqslant_P)$ jest WQO dla $\leqslant_P$ zdefiniowanego jako: $S \leqslant_P T$ wtw. gdy istnieje funkcja różnowartościowa $f : S \to T$ taka, że dla każdego $s \in S$ mamy $s \leqslant f(s)$.

Wskazówki

- pokaż, że nie
- skorzystaj z zadania 1
- ten sam przykład działa, nie jest istotne, czy rozważamy porządek na słowach, czy na zbiorach, tak, czy inaczej ponieważ $(i, j+1) \not\leqslant (j, k)$ dla dowolnego k to odpowiednie obiekty (słowa, zbiory) są nieporównywalne

3. Rozważmy automat czasowy, normalnie dozory mogą mieć jedynie postać: $x \geqslant c$, $x > c$, $x \leqslant c$, $x < c$ lub koniukcję tego typu warunków. Pozwólmy teraz na dozory postaci $x - y \leqslant c$. Z poprzednich ćwiczeń wiemy, że wyrażalność tego typu automatów nie zmienia się i da się taki automat przetłumaczyć na równoważny bez tego typu dozorów. Zapomnijmy jednak o tym, przyjrzyjmy się konstrukcji regionowej i sprawdźmy, czy działa dla tego typu dozorów.

Wskazówki

- dzielimy regiony na dodatkowe kawałki liniami postaci $y = x + k$ dla $-C \leqslant k \leqslant C$, gdzie C jest największą stałą w dozorach
- to, co trzeba sprawdzić, to:
  - w każdym regionie wszystkie jego punkty dają jednakową odpowiedź na każdy dozór
  - jeśli z punktu x w regionie R_1 możemy przejść do regionu R_2, to z każdego punktu w regionie R_1 możemy przejść do regionu R_2: to możemy sprawdzić przyglądając się operacjom resetowania zegarów oraz płynięcia czasu
- po sprawdzeniu dochodzimy do wniosku, że konstrukcja regionowa działa tak samo jak dla zwyczajnych automatów czasowych

4. Rozważamy teraz, co się stanie jeśli dodamy do automatów czasowych możliwość operacji postaci $x_1 + \ldots + x_k \leqslant y_1 + \ldots + y_m + c$ (podobnie z równością). Czy wtedy konstrukcja regionowa przechodzi?

Wskazówki

- możemy wtedy mieć warunki postaci $y = 2x$
- okazuje się, że wtedy musiałyby być linie podziału regionów postaci $y = 2x + c$
- kombinując to z liniami podziału regionów postaci $y = x + c$ otrzymujemy, że musiałby to być podział na nieskończenie wiele regionów, czyli konstrukcja regionowa nie zachowuje się dobrze

Następne zadanie dotyczy nierozstrzygalności problemu niepustości w tej sytuacji, to jednak szczegółowo na następnych ćwiczeniach.