Problemy Decyzyjne dla Systemów Nieskończonych

Ćwiczenia 1

17 lutego 2012

Na tych ćwiczeniach zajmiemy się pojęciem well quasi-ordering (WQO) bardzo przydatnym do analizy nieskończonych ciągów.

Definicja 1. *Quasi-porządek częściowy $(X, \preceq)$ nazwiemy well quasi-ordering (WQO) jeżeli dla każdego nieskończonego ciągu $x_1, x_2, \ldots$ elementów X istnieją dwa indeksy $i < j$ takie, że $x_i \preceq x_j$.*

Zasadniczo będziemy stosować WQO w sytuacjach, gdy $(X, \preceq)$ jest porządkiem częściowym, więc jeżeli ktoś zdecydowanie woli, to niech myśli o porządku częściowym. Quasi-porządek różni się tym od porządku, że nie jest antysymetryczny, czyli w quasi-porządku może zdarzyć się sytuacja, że $x \preceq y$, $x \succeq y$, ale $x \neq y$ (w porządku to jest zabronione).

WQO będzie się nam przydawało do analizy biegów systemów nieskończonych. Jeżeli $(X, \preceq)$ jest WQO, to znaczy, że w każdym biegu prędzej, czy później zdarzy się taka sytuacja, że trafiliśmy na konfigurację większą od wcześniej napotkanej. To pozwala często na skonstruowanie algorytmu.

1. Pokaż, że $(\mathbb{N}, \leqslant)$ jest WQO.

Wskazówki

- spróbujmy skonstruować kontrprzykład
- zacznijmy od pewnego $k \in \mathbb{N}$
- każdy następny wyraz musi być mniejszy od poprzedniego, czyli nie da rady skonstruować nieskończonego ciągu

2. WQO można wzmocnić Pokaż, że jeśli $(X, \preceq)$ jest WQO, to dla każdego ciągu nieskończonego $x_1, x_2, \ldots$ elementów X istnieje nieskończony podciąg ściśle rosnący, czyli $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots$ taki, że $x_{i_j} \preceq x_{i_{j+1}}$.

Wskazówki

- przyjrzyjmy się które ciągi rosnące można przedłużać do dłuższych ciagów rosnących
- spójrzmy na te elementy x_i, które nie mają w dalszej części ciągu większego od siebie
- czy takich elementów może być nieskończenie wiele

- nie - bo wówczas ciąg skonstruowany z nich przeczyłby warunkowi WQO
- niech ostatni taki element bez następnika to x_j
- zaczynając z x_{j+1} i idąc zawsze do następnika skonstruujemy ciąg nieskończony

3. Iloczyn WQO Pokaż, że jeśli $(X, \preceq_X)$ i $(Y, \preceq_Y)$ są WQO, to $(X \times Y, \preceq)$ zdefiniowany jako: $(x_1, y_1) \preceq (x_2, y_2) \iff (x_1 \leqslant x_2) \wedge (y_1 \leqslant y_2)$ też jest WQO.

Wskazówki

- znajdziemy 2 elementy porównywalne - skorzystajmy z zadania 2
- z zadania 2 istnieje nieskończony ciąg rosnący elementów X, weźmy odpowiadający ciąg $(x_{i_1}, y_{i_1}), (x_{i_2}, y_{i_2}), \ldots$, gdzie $x_{i_j} \preceq_X x_{i_{j+1}}$ dla każdego j
- ponieważ $(Y, \preceq_Y)$ też jest WQO, to istnieją indeksy $k < l$ takie, że $y_{i_k} \preceq_Y y_{i_l}$
- czyli $(x_{i_k}, y_{i_k}) \preceq (x_{i_l}, y_{i_l})$, zrobione

Wnoskiem z zadań 1 oraz 3 jest następujący lemat.

Lemat 1 (Dicksona). *$(\mathbb{N}^k, \leqslant)$ jest WQO.*

Porządek $\leqslant$ definiujemy naturalnie jako $(x_1, \ldots, x_k) \leqslant (y_1, \ldots, y_k) \iff \forall_{1 \leqslant i \leqslant k}\ x_i \leqslant y_i$. Lemat Dicksona jest bardzo ważny, odgrywa istotną rolę w wielu trudnych rezultatach dotyczących rozstrzygalności.

4. Warunki równoważne WQO Pokaż, że $(X, \preceq)$ jest WQO wtedy i tylko wtedy, gdy w X nie ma nieskończonego ciągu zstępującego oraz nieskończonego antyłańcucha.

Wskazówki

- antyłańcuch to jest zbiór elementów parami nieporównywalnych
- najpierw $\Rightarrow$
- banalne - gdyby istniał antyłańcuch lub ciąg, to przeczyłby warunkowi WQO
- teraz $\Leftarrow$ - trudniej
- spróbujmy skonstruować kontrprzykład, spójrzmy na elementy nie posiadające następnika (tym razem *mniejszego* elementu dalej w ciągu)

- elementów bez następnika jest nieskończenie wiele: idziemy do następnika itd. aż w końcu się zatrzymamy (bo skonstruowalibyśmy ciąg nieskończony zstępujący), zaczynamy z następnego elementu itd.
- spójrzmy na ten ciąg elementów bez następnika, żaden z nich nie jest większy od elementu dalej w ciągu, jeżeli żaden nie jest też mniejszy (zaprzeczenie WQO), to wszystkie są nieporównywalne, czyli tworzą nieskończony antyłańcuch (sprzeczność)

Uwaga 1. *Zwróćmy uwagę, że zadanie 4 mówi, że w porządkach dobrze ufundowanych (czyli takich bez nieskończonego ciągu zstępującego) warunek WQO jest równoważny nieistnieniu nieskończonego antyłańcucha. Dowolnie duże antyłańcuchy mogą jednak istnieć, np. dla* $\mathbb{N}^2$ *antyłańcuchem rozmiaru* $n+1$ *jest zbiór* $\{(x, y) : x + y = n\}$.

5. Przykład nie WQO Pokaż, że drzewa z porządkiem bycia podgrafem nie są WQO.

Wskazówki

- wskaż nieskończony antyłańcuch
- n-ty graf to ścieżka o n krawędziach, gdzie do końcowych wierzchołków doczepione są jeszcze po dwie dodatkowe krawędzie, to tworzy antyłańcuch

Drugim z ważnych lematów dotyczących WQO, także bardzo szeroko wykorzystywany jest lemat dotyczący porządku na słowach. Słowo s jest mniejsze od słowa t jeżeli jest jego podciągiem, na przykład $abc \preceq daddbcd$.

Lemat 2 (Higmana)**.** *Dla* $|\Sigma| < \infty$ *porządek* $(\Sigma^*, \preceq)$ *jest WQO.*

Jest też wersja ogólniejsza, porządek jest teraz zdefiniowany tak, że $s \preceq t$ jeżeli istnieje podciąg t długości s, który na każdej pozycji jest większy od odpowiadającej pozycji w s. Na przykład $456 \preceq 1151671$.

Lemat 3 (Higmana ogólny)**.** *Jeżeli* $(X, \leqslant)$ *to wówczas również* $(X^*, \preceq)$ *jest WQO.*

Dowód. Przypuśćmy, że teza jest fałszywa i $(X^*, \preceq)$ nie jest WQO, istnieje więc kontrprzykład - nieskończony ciąg bez pary $i < j$, $x_i \preceq x_j$.

Skonstruujemy teraz kontrprzykład najmniejszy w naszym specjalnym sensie. Spójrzmy na wszystkie kontrprzykłady i wybierzmy taki, że jego pierwszy wyraz jest najkrótszy - wpiszmy go jako pierwszy wyraz naszego ciągu: x_1. Spójrzmy teraz na wszystkie kontrprzykłady i tym pierwszym wyrazie i wybierzmy taki, że jego drugi wyraz jest najkrótszy - wpiszmy go jako drugi wyraz naszego ciągu: x_2. Postępując dalej w ten sposób otrzymamy pewien kontrprzykład:

$$x_1, x_2, x_3, \ldots$$

taki, że nie można zmniejszyć długości żadnego jego słowa (i ewentualnie tych na prawo od niego) z zachowaniem własności bycia kontrprzykładem.

Ponieważ $(X, \leqslant)$ jest WQO, to możemy z tego ciągu wybrać nieskończony podciąg taki, że ciąg pierwszych liter jest rosnący, mianowicie:

$$x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, \ldots$$

Niech teraz x'_{i_j} to słowo x_{i_j} bez pierwszej litery. Zauważmy teraz, że w ciąg:

$$x_1, x_2, \ldots, x_{i_1 - 1}, x'_{i_1}, x'_{i_2}, x'_{i_3}, \ldots$$

również jest kontrprzykładem, a do tego mniejszym od uprzednio rozważanego (gdyż długość słowa x'_{i_1} jest mniejsza niż x_{i_1}), sprzeczność. $\square$

6. Podzbiory a WQO Rozstrzygnij, czy prawdziwa jest implikacja: $(X, \preceq)$ jest WQO $\Longrightarrow$ $(\mathbb{P}(X), \preceq_{wl})$ jest WQO, gdzie dla $Y, Z \in \mathbb{P}(X)$ mówimy, że $Y \preceq_{wl} Z$ gdy istnieje funkcja różnowartościowa $f : Y \to Z$ taka, że dla każdego $y \in Y$ zachodzi $y \preceq f(y)$. Na przykład $\{2, 3, 8\} \preceq_{wl} \{1, 4, 7, 8\}$.

Wskazówki Okazało się, że nie umiemy tego zrobić na ćwiczeniach, będzie później (jeśli się uda rozstrzygnąć).

7. Skończone podzbiory a WQO Rozstrzygnij, czy prawdziwa jest implikacja: $(X, \preceq)$ jest WQO $\Longrightarrow$ $(\mathbb{P}_{\text{fin}}(X), \preceq_{wl})$ jest WQO, gdzie przez $\mathbb{P}_{\text{fin}}(X)$ rozumiemy skończone podzbiory X.

Wskazówki

- skorzystać z lematu Higmana
- każdy zbiór skończony Y można jakoś zapisać jako słowo, ustalmy to jako $zap(Y)$
- rozważmy ciąg zbiorów $X_1, X_2, \ldots$, z lematu Higmana mamy, że $zap(X_i) \preceq zap(X_j)$ dla pewnego $i < j$
- wówczas również $X_i \preceq_{wl} X_j$

8. Higman na nieskończonych słowach Rozstrzygnij, czy ogólna wersja lematu Higmana jest też prawdziwa dla nieskończonych słów.

Wskazówki Nie rozstrzygnęliśmy tego na ćwiczeniach, udało się jedynie ustalić, że okrojona wersja (dla skończonego alfabetu) jest prawdziwa na nieskończonych słowach. Zapewne zadanie pojawi się jeszcze później (może na ćw. 3).

Dalszymi rozszerzeniami lematu Higmana są twierdzenie Kruskala i twierdzenie Robertson-Seimura. Tw. Kruskala mówi o tym, że porządek bycia poddrzewem (analogicznie jak podsłowem) dla (skończonych) drzew jest WQO. Dowód zajmuje około stronę i jest nieco trudniejszy niż dowód lematu Higmana (można go znaleźć na stronie http://www.mimuw.edu.pl/ malcin/grafy/). Tw. Robertsona-Seimura mówi, że dla grafów porządek bycia minorem jest WQO (porządek bycia podgrafem jak pokazaliśmy nie działa). Dowód tego twierdzenia to seria około 20 długich artykułów pisanych przez lata, wyrosła z tego cała nowa teoria (też można nieco poczytać pod powyższym linkiem).