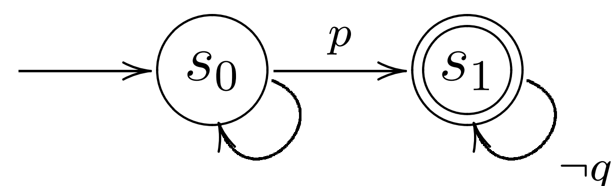
Weryfikacja wspomagana komputerowo

Wykład 3: ω-automaty

Po co nam ω-automaty?

Przykład:

$$\phi = \neg G(p \implies \mathsf{X}\, F q) \quad \mapsto \quad A_\phi \quad =$$



LTL $\subseteq$ ω-automaty

I. ω-automaty

Def.: ω-automat (automat **Büchiego**) $\mathcal{A} = \langle \Sigma, S, S_{\text{pocz}}, \sigma, F \rangle$

- $S_{\text{pocz}} \subseteq S$ niepusty zbiór stanów początkowych
- $\sigma \subseteq S \times \Sigma \times S$ relacja przejścia
- $F \subseteq S$ niepusty zbiór stanów akceptujących

$\mathcal{A}$ jest deterministyczny gdy $|S_{\text{pocz}}| = 1$ i $\forall s, a.\ |\sigma(s, a)| \leq 1$.

Def.: ω-automat (automat **Büchiego**) $\mathcal{A} = \langle \Sigma, S, S_{\text{pocz}}, \sigma, F \rangle$

- $S_{\text{pocz}} \subseteq S$ niepusty zbiór stanów początkowych
- $\sigma \subseteq S \times \Sigma \times S$ relacja przejścia
- $F \subseteq S$ niepusty zbiór stanów akceptujących

$\mathcal{A}$ jest deterministyczny gdy $|S_{\text{pocz}}| = 1$ i $\forall s, a.\ |\sigma(s, a)| \leq 1$.

ω-słowa: $w = a_0\ a_1\ a_2\ \ldots$

Def.: Dla $w = a_0\, a_1\, a_2\, \ldots$, bieg automatu $\mathcal{A}$ to $r = s_0\, s_1\, s_2\, \ldots$ taki, że $\forall i.\ (s_i, a_i, s_{i+1}) \in \sigma$.

Def.: Dla $w = a_0\ a_1\ a_2\ \ldots$, bieg automatu $\mathcal{A}$ to
$r = s_0\ s_1\ s_2\ \ldots$ taki, że $\forall i.\ (s_i, a_i, s_{i+1}) \in \sigma$.

Bieg jest akceptujący gdy $s_i \in F$ dla nieskończenie wielu i.

Def.: Dla $w = a_0\, a_1\, a_2\, \ldots$, bieg automatu $\mathcal{A}$ to $r = s_0\, s_1\, s_2\, \ldots$ taki, że $\forall i.\ (s_i, a_i, s_{i+1}) \in \sigma$.

Bieg jest akceptujący gdy $s_i \in F$ dla nieskończenie wielu i.

Niech $\inf(r) = \{s \in S : s = s_i$ dla nieskończenie wielu $i\}$.
Bieg jest akceptujący gdy $\inf(r) \cap F \neq \emptyset$.

Def.: Dla $w = a_0\ a_1\ a_2\ \ldots$, bieg automatu $\mathcal{A}$ to
$r = s_0\ s_1\ s_2\ \ldots$ taki, że $\forall i.\ (s_i, a_i, s_{i+1}) \in \sigma$.

Bieg jest akceptujący gdy $s_i \in F$ dla nieskończenie wielu i.

Niech $\inf(r) = \{s \in S : s = s_i$ dla nieskończenie wielu $i\}$.
Bieg jest akceptujący gdy $\inf(r) \cap F \neq \emptyset$.

$L_\omega(\mathcal{A}) := \{w : \mathcal{A}$ ma bieg akceptujący dla $w\}$.

Def.: Dla $w = a_0\ a_1\ a_2\ \ldots$, bieg automatu $\mathcal{A}$ to $r = s_0\ s_1\ s_2\ \ldots$ taki, że $\forall i.\ (s_i, a_i, s_{i+1}) \in \sigma$.

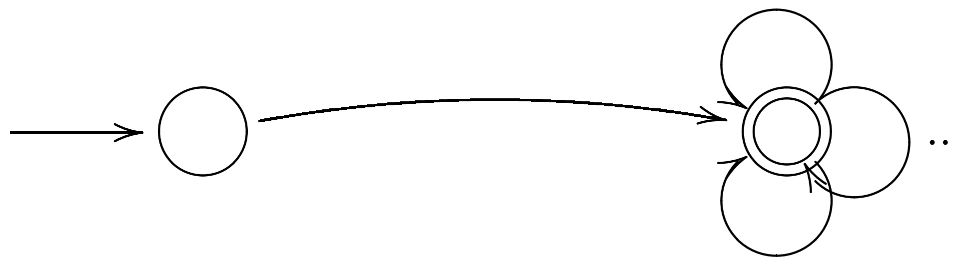
Bieg jest akceptujący gdy $s_i \in F$ dla nieskończenie wielu i.

Niech $\inf(r) = \{s \in S : s = s_i$ dla nieskończenie wielu $i\}$.
Bieg jest akceptujący gdy $\inf(r) \cap F \neq \emptyset$.

$L_\omega(\mathcal{A}) := \{w : \mathcal{A}$ ma bieg akceptujący dla $w\}$.

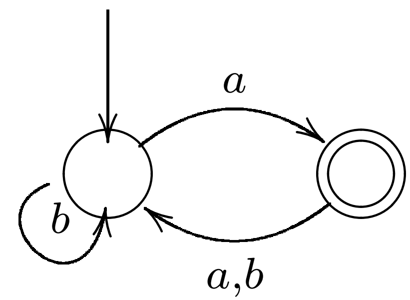
Def.: Język $L \subseteq \Sigma^\omega$ jest ω-regularny gdy $L = L_\omega(\mathcal{A})$ dla pewnego $\mathcal{A}$.

Bieg akceptujący wygląda tak:

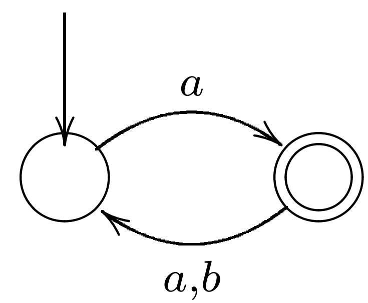


$\Sigma = \{a, b\}$

nieskończenie wiele a $\qquad (b^* \ a)^\omega$



odd(a) $\qquad (a \ (a+b))^\omega$



Wniosek: $LTL \subsetneq \omega$-automaty

Ćwiczenie

– nieskończenie wiele a i b

– między każdymi dwoma a
parzysta liczba b

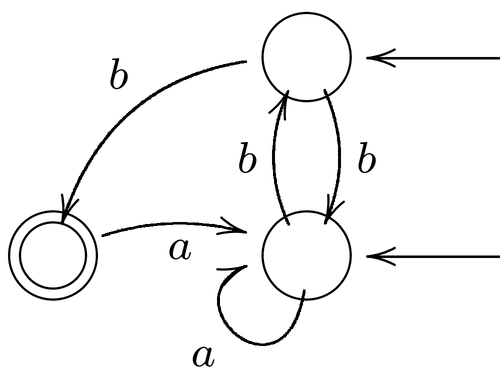
$$b^* \ (aa^* \ bb(bb)^*)^\omega$$

Ćwiczenie

– nieskończenie wiele a i b

– między każdymi dwoma a
parzysta liczba b

$$b^* \ (aa^* \ bb(bb)^*)^\omega$$



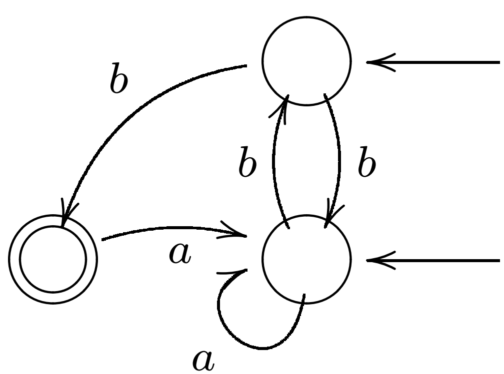
a deterministyczny ?

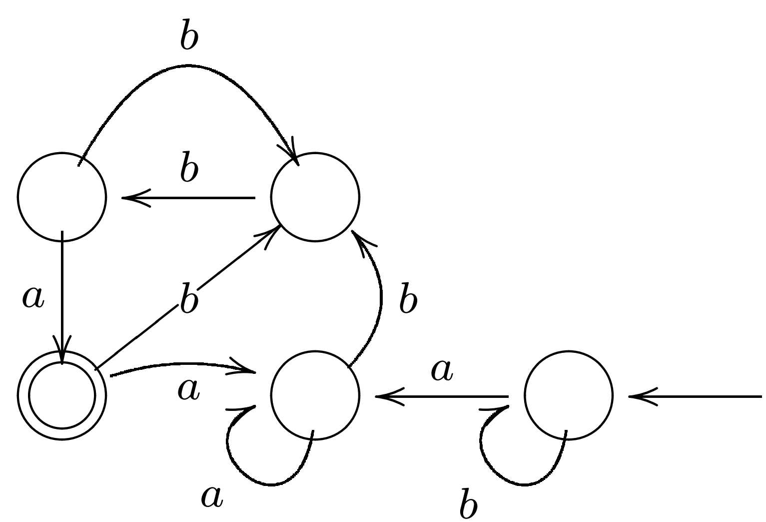
Ćwiczenie

– nieskończenie wiele a i b

$$b^* \ (aa^* \ bb(bb)^*)^\omega$$

– między każdymi dwoma a
parzysta liczba b





Ćwiczenie

$\Sigma = \{a, b\}$

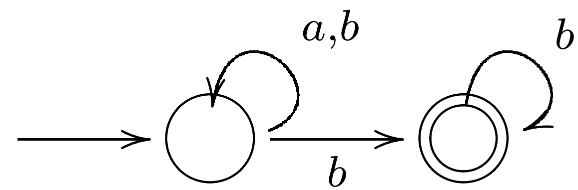
skończenie wiele a $(b + a)^* b^\omega$

Ćwiczenie

$\Sigma = \{a, b\}$

skończenie wiele a

$(b+a)^*b^\omega$



a deterministyczny ?

Tw: Języki ω-regularne są zamknięte na $\cup$, $\cap$ i uzupełnienie.

$\vee$, $\wedge$ i $\neg$

$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \mapsto \mathcal{A}$

(1) $L_\omega(\mathcal{A}) = L_\omega(\mathcal{A}_1) \cup L_\omega(\mathcal{A}_2)$

(2) $L_\omega(\mathcal{A}) = L_\omega(\mathcal{A}_1) \cap L_\omega(\mathcal{A}_2)$

$\mathcal{A} \mapsto \bar{\mathcal{A}}$

(3) $L_\omega(\bar{\mathcal{A}}) = \Sigma^\omega \setminus L_\omega(\mathcal{A})$

(2) $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \ \mapsto \ \mathcal{A}$ $\qquad L_\omega(\mathcal{A}) \ = \ L_\omega(\mathcal{A}_1) \ \cap \ L_\omega(\mathcal{A}_2)$

?

(2) $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \mapsto \mathcal{A}$ $\qquad L_\omega(\mathcal{A}) = L_\omega(\mathcal{A}_1) \cap L_\omega(\mathcal{A}_2)$

$$S = S_1 \times S_2 \times \{1, 2\}$$

$$S_{\text{pocz}} = S_{1,\text{pocz}} \times S_{2,\text{pocz}} \times \{1\}$$

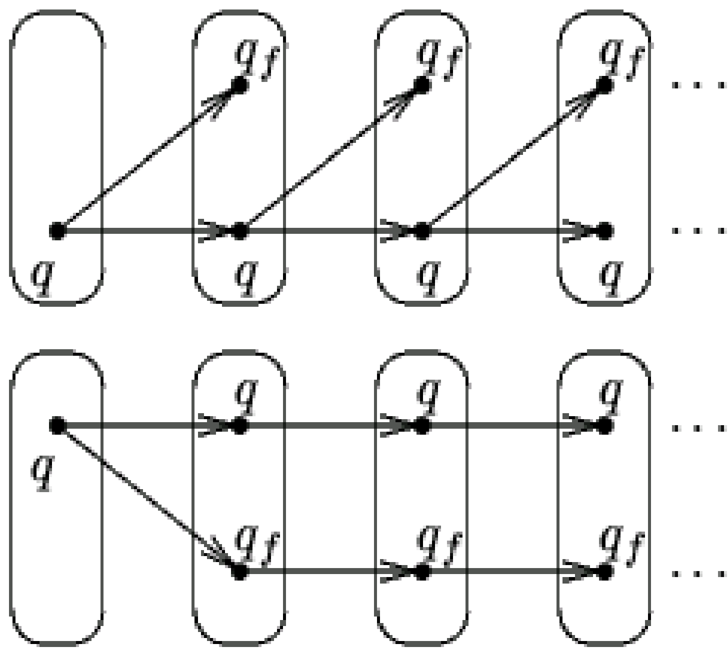
$$F = F_1 \times S_2 \times \{1\}$$

$$((s,t,i), a, (s',t',j)) \in \sigma \iff (s,a,s') \in \sigma_1,\ (t,a,t') \in \sigma_2,$$

$$j = \begin{cases} 2 & \text{gdy } i = 1,\ s \in F_1 \\ 1 & \text{gdy } i = 2,\ t \in F_2 \\ i & \text{wpp} \end{cases}$$

(3) $\mathcal{A} \mapsto \bar{\mathcal{A}}$ $$L_\omega(\bar{\mathcal{A}}) = \Sigma^\omega \setminus L_\omega(\mathcal{A})$$

– brak determinizacji!



Brak determinizacji!

Tw:
$(a+b)^*b^\omega$ nie jest akceptowany przez automat deterministyczny.

Brak determinizacji!

Tw:
$(a+b)^*b^\omega$ nie jest akceptowany przez automat deterministyczny.

Dowód: Załóżmy, że $L_\omega(\mathcal{A}) = (a+b)^*b^\omega$, $\mathcal{A}$ deterministyczny.

Brak determinizacji!

Tw:
$(a+b)^*b^\omega$ nie jest akceptowany przez automat deterministyczny.

Dowód: Załóżmy, że $L_\omega(\mathcal{A}) = (a+b)^*b^\omega$, $\mathcal{A}$ deterministyczny.

$w_0 = b^\omega$. Dla pewnego k_0, $\sigma(s_0, b^{k_0}) \in F$.

Brak determinizacji!

Tw:
$(a+b)^*b^\omega$ nie jest akceptowany przez automat deterministyczny.

Dowód: Załóżmy, że $L_\omega(\mathcal{A}) = (a+b)^*b^\omega$, $\mathcal{A}$ deterministyczny.

$w_0 = b^\omega$. Dla pewnego k_0, $\sigma(s_0, b^{k_0}) \in F$.
$w_1 = b^{k_0}ab^\omega$. Dla pewnego k_1, $\sigma(s_0, b^{k_0}ab^{k_1}) \in F$.
...

Brak determinizacji!

Tw:
$(a+b)^*b^\omega$ nie jest akceptowany przez automat deterministyczny.

Dowód: Załóżmy, że $L_\omega(\mathcal{A}) = (a+b)^*b^\omega$, $\mathcal{A}$ deterministyczny.

$w_0 = b^\omega$. Dla pewnego k_0, $\sigma(s_0, b^{k_0}) \in F$.
$w_1 = b^{k_0}ab^\omega$. Dla pewnego k_1, $\sigma(s_0, b^{k_0}ab^{k_1}) \in F$.
...

$\exists i < j$ takie, że $\sigma(s_0, b^{k_0}ab^{k_1}\ldots ab^{k_i}) \;=\; \sigma(s_0, b^{k_0}ab^{k_1}\ldots ab^{k_j})$

Brak determinizacji!

Tw:
$(a+b)^*b^\omega$ nie jest akceptowany przez automat deterministyczny.

Dowód: Załóżmy, że $L_\omega(\mathcal{A}) = (a+b)^*b^\omega$, $\mathcal{A}$ deterministyczny.

$w_0 = b^\omega$. Dla pewnego k_0, $\sigma(s_0, b^{k_0}) \in F$.
$w_1 = b^{k_0}ab^\omega$. Dla pewnego k_1, $\sigma(s_0, b^{k_0}ab^{k_1}) \in F$.
...

$\exists i < j$ takie, że $\sigma(s_0, b^{k_0}ab^{k_1}\dots ab^{k_i}) = \sigma(s_0, b^{k_0}ab^{k_1}\dots ab^{k_j})$

Więc $\mathcal{A}$ akceptuje $b^{k_0}ab^{k_1}\dots ab^{k_i}(a\dots ab^{k_j})^\omega$

sprzeczność!

(3) $\mathcal{A} \mapsto \bar{\mathcal{A}}$ $\qquad\qquad$ $L_\omega(\bar{\mathcal{A}}) = \Sigma^\omega \setminus L_\omega(\mathcal{A})$

- brak determinizacji
- skomplikowana konstrukcja
- $|\bar{\mathcal{A}}| = 2^{\mathcal{O}(n \cdot \log n)}$, gdzie $n = |\mathcal{A}|$

Morał: Najlepiej unikać uzupełnienia

$$
\begin{tikzcd}
\phi \arrow[rr, mapsto] \arrow[d, mapsto, dotted] & & \neg\phi \arrow[d, mapsto] \\
\mathcal{A}_\phi \arrow[r, mapsto, dotted] & \bar{\mathcal{A}}_\phi \arrow[r, phantom, "\equiv"] & \mathcal{A}_{\neg\phi}
\end{tikzcd}
$$

Pytanie:

Jak wygląda uzupełnienie, gdy $\mathcal{A}$ jest deterministyczny?

$$\mathcal{A} \longmapsto \bar{\mathcal{A}}$$

$$F \longmapsto \bar{F} = Q \setminus F$$

Czy $L_\omega(\bar{\mathcal{A}}) \; = \; \Sigma^\omega \; \setminus \; L_\omega(\mathcal{A})$?

Pytanie:

Jak wygląda uzupełnienie, gdy $\mathcal{A}$ jest deterministyczny?

$$\mathcal{A} \longmapsto \bar{\mathcal{A}}$$

$$F \longmapsto \bar{F} = Q \setminus F$$

Czy $L_\omega(\bar{\mathcal{A}}) \;=\; \Sigma^\omega \;\setminus\; L_\omega(\mathcal{A})$? **NIE!**

co-Büchi: bieg $r \;=\; s_0\; s_1\; s_2\; \ldots$ jest akceptujący gdy $s_i \in \bar{F}$ dla prawie wszystkich i $(\mathrm{inf}(r) \subseteq \bar{F})$.

Złożoność

problem dla automatów sk.	problem dla ω-automatów	złożoność	koszt algorytmu
$L(A) \neq \emptyset$	$L_\omega(A) \neq \emptyset$	NLOGSPACE	$\mathcal{O}(n)$
$L(A) = \Sigma^*$	$L_\omega(A) = \Sigma^\omega$	PSPACE	$2^{\mathcal{O}(n \cdot \log n)}$
$L(A) \subseteq L(B)$	$L_\omega(A) \subseteq L_\omega(B)$	PSPACE	$2^{\mathcal{O}(n \cdot \log n)}$

Lasso

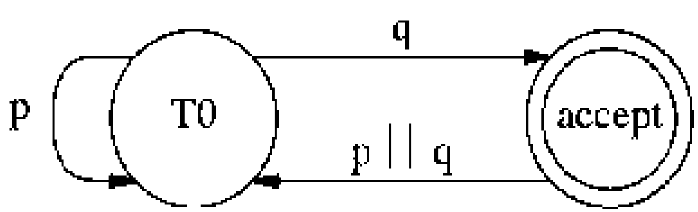
Tw: $L_\omega(A) \neq \emptyset$ wtw gdy $\mathcal{A}$ ma lasso.

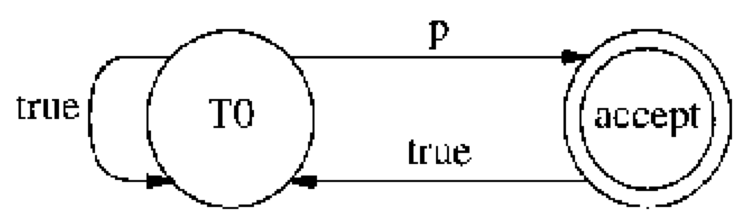
II. LTL $\mapsto$ BA

SPIN – przykłady

```
$ spin -f "[](p U q)"
never {
T0:
        if
        :: (p) -> goto T0
        :: (q) -> goto accept
        fi;
accept:
        if
        :: ((p) || (q)) -> goto T0
        fi
}
```

```
$ spin -f "[]<>p"
never {
T0:
        if
        :: (true) -> goto T0
        :: (p) -> goto accept
        fi;
accept:
        if
        :: (true) -> goto T0
        fi
}
```





dokumentacja SPIN'a

Uogólnione ω-automaty (GBA)

– $\{F_1, \ldots, F_n\}$ zamiast F

– bieg r jest akceptujący gdy $\forall i.\ \inf(r) \cap F_i \neq \emptyset$

Pytanie: Czy automaty uogólnione są ogólniejsze?

Uogólnione ω-automaty (GBA)

– $\{F_1, \ldots, F_n\}$ zamiast F

– bieg r jest akceptujący gdy $\forall i.\ \inf(r) \cap F_i \neq \emptyset$

Pytanie: Czy automaty uogólnione są ogólniejsze?

$$\mathcal{A}_{F_1 \ldots F_n} \ \mapsto \ \mathcal{A}_F$$

$$L_\omega(\mathcal{A}_{F_1 \ldots F_n}) \ = \ L_\omega(\mathcal{A}_F) \ \subseteq \ L_\omega(\mathcal{A}_{F_1}) \cap \ldots \cap L_\omega(\mathcal{A}_{F_n})$$

$$|\mathcal{A}_F| = \mathcal{O}(|\mathcal{A}_{F_1,\ldots,F_n}| \cdot n)$$

- **SPIN:** LTL $\mapsto$ GBA $\mapsto$ BA
- **LTL2BA:** LTL $\mapsto$ ABA $\mapsto$ GBA' $\mapsto$ BA

- Weryfikacja w locie

LTL^{+} :

$$\phi \;:=\; p \mid \neg p \mid \phi_1 \wedge \phi_2 \mid \phi_1 \vee \phi_2 \mid \mathsf{X}\,\phi \mid \phi_1\,\mathsf{U}\,\phi_2 \mid \phi_1\,\mathsf{R}\,\phi_2 \mid$$

$$\texttt{true} \mid \texttt{false}$$

Intuicja: $\phi \equiv \text{teraz}(\phi) \;\overset{\wedge}{\underset{\vee}{-}}\; \text{później}(\phi)$

$$\phi\,\mathsf{U}\,\psi \;\equiv\; \psi \;\vee\; (\phi \wedge \mathsf{X}\,(\phi\,\mathsf{U}\,\psi))$$

$$\phi\,\mathsf{R}\,\psi \;\equiv\; \psi \;\wedge\; (\phi \vee \mathsf{X}\,(\phi\,\mathsf{R}\,\psi))$$

(punkty stałe)

. . . nie myślmy o jutrze :)

$\alpha \quad \mapsto \quad$ dziś(α) – formuła zdaniowa nad $P \cup \bar{P} \cup \{ \mathsf{X}\,\phi : \phi \ldots \}$

$$\bar{P} = \{\neg p : p \in P\}$$

$$
\begin{array}{lcl}
\text{dziś}(\alpha) & = & \alpha, \quad \text{gdy} \quad \alpha = p, \neg p, \mathsf{X}\,\beta, \mathtt{true}, \mathtt{false} \\
\text{dziś}(\alpha \vee \beta) & = & \text{dziś}(\alpha) \;\vee\; \text{dziś}(\beta) \\
\text{dziś}(\alpha \wedge \beta) & = & \text{dziś}(\alpha) \;\wedge\; \text{dziś}(\beta) \\
\text{dziś}(\alpha\,\mathsf{U}\,\beta) & = & \text{dziś}(\beta) \;\vee\; (\text{dziś}(\alpha) \wedge \mathsf{X}\,(\alpha\,\mathsf{U}\,\beta)) \\
\text{dziś}(\alpha\,\mathsf{R}\,\beta) & = & \text{dziś}(\beta) \;\wedge\; (\text{dziś}(\alpha) \vee \mathsf{X}\,(\alpha\,\mathsf{R}\,\beta))
\end{array}
$$

$$\alpha \;\mapsto\; \text{dziś}(\alpha) \;\mapsto\; \text{dnf}(\alpha) \;\subseteq\; \mathcal{P}(P \cup \bar{P} \cup \{\,\mathsf{X}\,\phi : \phi \ldots\})$$

$$\boxed{\text{dziś}(\alpha) \;\equiv\; \bigvee_{X \in \text{dnf}(\alpha)} \left(\bigwedge X\right)}$$

Na przykład:

$$
\begin{array}{lcll}
\text{dnf}(\alpha) & = & \{\{\alpha\}\}, \quad \text{gdy} \;\; \alpha = p, \neg p, \mathsf{X}\,\beta & \\
\text{dnf}(\alpha \vee \beta) & = & \text{dnf}(\alpha) \cup \text{dnf}(\beta) & \\
\text{dnf}(\alpha\,\mathsf{U}\,\beta) & = & \text{dnf}(\beta) \cup \text{dnf}(\alpha \wedge \mathsf{X}\,(\alpha\,\mathsf{U}\,\beta)) & \\
\text{dnf}(\texttt{true}) & = & \{\emptyset\} & \bigwedge\emptyset \;\equiv\; \texttt{true} \\
\text{dnf}(\texttt{false}) & = & \emptyset & \bigvee\emptyset \;\equiv\; \texttt{false}
\end{array}
$$

GBA $\mathcal{A}_\phi = \langle \Sigma, S, S_{\text{pocz}}, \sigma, F \rangle$:

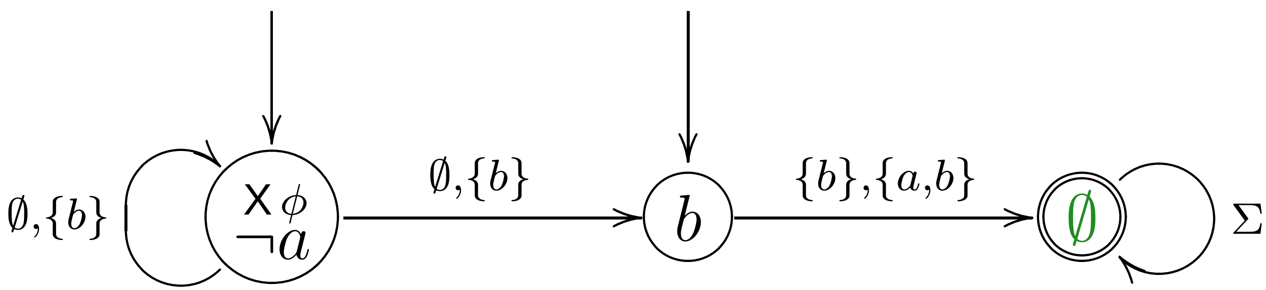
- $S = \mathcal{P}(P \cup \bar{P} \cup \{\mathsf{X}\,\phi : \phi \ldots\})$
- $\Sigma = \mathcal{P}(P)$
- $S_{\text{pocz}} = \text{dnf}(\phi)$
- $X \xrightarrow{A} Y$ wtw. gdy
  - $X \cap P \subseteq A$ — niesprzeczność
  - $(X \cap \bar{P}) \cap A = \emptyset$ — X i A dziś
  - $Y \in \text{dnf}(\bigwedge \{\alpha \mid \mathsf{X}\,\alpha \in X\})$ — możliwe jutro
- $F = ?$

LTL $\mapsto$ GBA (przykład 1)

$\phi = \neg a \,\mathsf{U}\, b$

$S = \mathcal{P}(a,\ \neg a,\ b,\ \neg b,\ \mathsf{X}(\neg a \,\mathsf{U}\, b))$

$\Sigma = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$



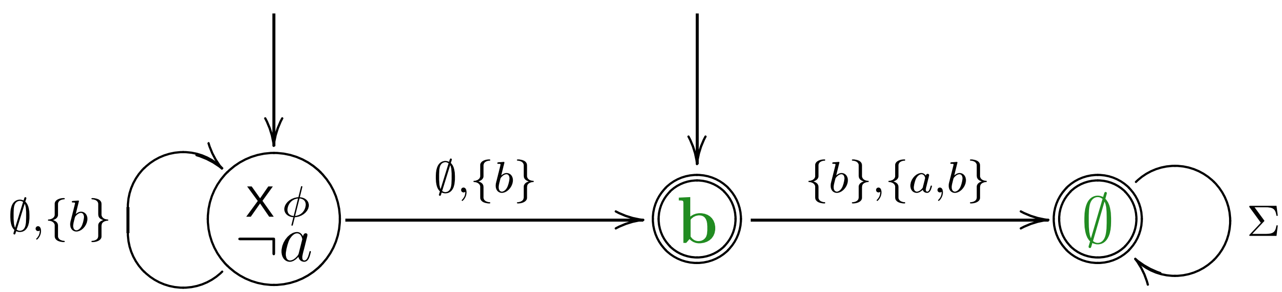
$F = ?$

LTL $\mapsto$ GBA (przykład 1)

$\phi = \neg a \, \mathsf{U} \, b$

$S = \mathcal{P}(a,\ \neg a,\ b,\ \neg b,\ \mathsf{X}(\neg a \, \mathsf{U} \, b))$

$\Sigma = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$



$F = \{\{\emptyset, \{b\}\}\}$

– $F_i = \{A \mid \alpha_i \,\mathsf{U}\, \beta_i \notin A \ \vee \ \beta_i \in A\}$, $\quad i = 1, \ldots, n$

$\{\alpha_i \,\mathsf{U}\, \beta_i \mid i = 1, \ldots, n\} \subseteq \text{podfurmuły}(\phi)$

– $F_i = \{X \in S \mid \alpha_i \,\mathsf{U}\, \beta_i \notin \text{cons}(X) \ \vee \ \beta_i \in \text{cons}(X)\}$

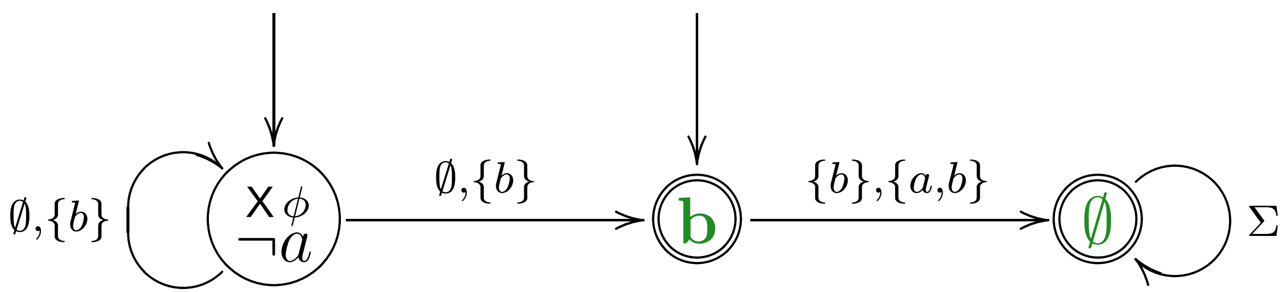
$X \subseteq \text{cons}(X)$
$\alpha \vee \beta \in \text{cons}(X)$ jeśli $\alpha \in \text{cons}(X)$ lub $\beta \in \text{cons}(X)$
$\alpha \wedge \beta \in \text{cons}(X)$ jeśli $\alpha \in \text{cons}(X)$ i $\beta \in \text{cons}(X)$
$\alpha \,\mathsf{U}\, \beta \in \text{cons}(X)$ jeśli $\beta \ \vee \ (\alpha \wedge \mathsf{X}\,(\alpha \,\mathsf{U}\, \beta)) \in \text{cons}(X)$
$\alpha \,\mathsf{R}\, \beta \in \text{cons}(X)$ jeśli $\beta \ \wedge \ (\alpha \vee \mathsf{X}\,(\alpha \,\mathsf{R}\, \beta)) \in \text{cons}(X)$

LTL $\mapsto$ GBA (przykład 1 cd)

$\phi = \neg a \,\mathsf{U}\, b$

$S = \mathcal{P}(a, \; \neg a, \; b, \; \neg b, \; \mathsf{X}\,(\neg a \,\mathsf{U}\, b))$

$\Sigma = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$



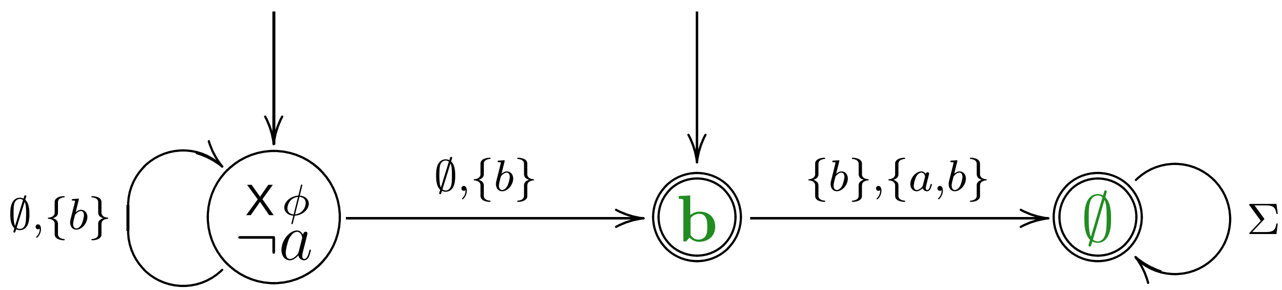
Czy automat $\mathcal{A}_\phi$ może być mniejszy?

LTL $\mapsto$ GBA (przykład 1 cd)

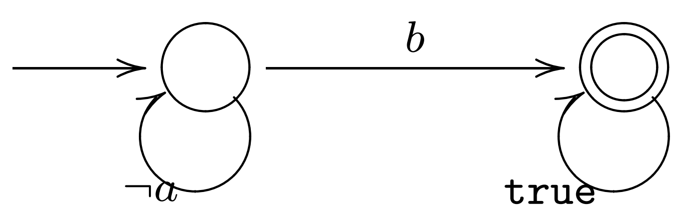
$\phi = \neg a \,\mathsf{U}\, b$

$S = \mathcal{P}(a,\ \neg a,\ b,\ \neg b,\ \mathsf{X}\,(\neg a \,\mathsf{U}\, b))$

$\Sigma = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$



Czy automat $\mathcal{A}_\phi$ może być mniejszy? **TAK!**



LTL $\mapsto$ GBA (przykład 2)

$$\theta = \neg \mathsf{G}\,(q \implies \mathsf{F}\,r) \equiv \mathsf{F}\,(q \wedge \mathsf{G}\,\neg r)$$

$$\text{dnf}(\,\mathsf{F}\,\alpha) = \text{dnf}(\alpha) \cup \{\,\mathsf{X}\ \mathsf{F}\,\alpha\} \qquad\qquad \mathsf{F}\,\alpha \equiv \texttt{true}\,\mathsf{U}\,\alpha$$

$$\text{dnf}(\,\mathsf{G}\,\alpha) = \text{dnf}(\alpha \wedge \mathsf{X}\ \mathsf{G}\,\alpha) \qquad\qquad \mathsf{G}\,\alpha \equiv \texttt{false}\,\mathsf{R}\,\alpha$$

$$S = \mathcal{P}(q,\ \neg q,\ r,\ \neg r,\ \mathsf{X}\,(\,\mathsf{F}\,(q \wedge \mathsf{G}\,\neg r)),\ \mathsf{X}\ \mathsf{G}\,\neg r) \qquad\qquad F = ?$$

$$\text{dnf}(\,\mathsf{F}\,(q \wedge \mathsf{G}\,\neg r)) = \mathsf{X}\ \mathsf{F}\,(q \wedge \mathsf{G}\,\neg r) \ \vee\ (q \wedge \neg r \wedge \mathsf{X}\ \mathsf{G}\,\neg r)$$

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{X}\ \mathsf{F}\,(q \wedge \mathsf{G}\,\neg r) \arrow[loop above, "\Sigma"] \arrow[r, "\Sigma"] & q, \neg r,\ \mathsf{X}\ \mathsf{G}\,\neg r \arrow[r, "\{q\}"] & \neg r,\ \mathsf{X}\ \mathsf{G}\,\neg r \arrow[loop above, "\emptyset{,}\{q\}"] \\
{} \arrow[u] & {} \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

LTL $\mapsto$ GBA (przykład 2)

$$\theta = \neg(\mathsf{G}\,\mathsf{F}\,p \implies \mathsf{G}\,(q \implies \mathsf{F}\,r)) \equiv \mathsf{G}\,\mathsf{F}\,p \wedge \mathsf{F}\,(q \wedge \mathsf{G}\,\neg r)$$

$$\mathsf{dnf}(\mathsf{F}\,(q \wedge \mathsf{G}\,\neg r)) = \mathsf{X}\,\mathsf{F}\,(q \wedge \mathsf{G}\,\neg r) \;\vee\; (q \wedge \neg r \wedge \mathsf{X}\,\mathsf{G}\,\neg r)$$

$$\mathsf{dnf}(\mathsf{G}\,\mathsf{F}\,p) = \mathsf{dnf}((p \vee \mathsf{X}\,\mathsf{F}\,p) \;\wedge\; \mathsf{X}\,\mathsf{G}\,\mathsf{F}\,p) = (p \wedge \mathsf{X}\,\mathsf{G}\,\mathsf{F}\,p) \;\vee\; (\mathsf{X}\,\mathsf{F}\,p \wedge \mathsf{X}\,\mathsf{G}\,\mathsf{F}\,p)$$

$$\mathsf{dnf}(\mathsf{G}\,\mathsf{F}\,p \wedge \mathsf{F}\,(q \wedge \mathsf{G}\,\neg r)) = \ldots \vee \ldots \vee \ldots \vee \ldots$$

$\mathsf{X}\,\mathsf{F}\,(q \wedge \mathsf{G}\,\neg r), p, \mathsf{X}\,\mathsf{G}\,\mathsf{F}\,p$ $\qquad$ $q, \neg r, \mathsf{X}\,\mathsf{G}\,\neg r, p, \mathsf{X}\,\mathsf{G}\,\mathsf{F}\,p$

$\mathsf{X}\,\mathsf{F}\,(q \wedge \mathsf{G}\,\neg r), \mathsf{X}\,\mathsf{F}\,p, \mathsf{X}\,\mathsf{G}\,\mathsf{F}\,p$ $\qquad$ $q, \neg r, \mathsf{X}\,\mathsf{G}\,\neg r, \mathsf{X}\,\mathsf{F}\,p, \mathsf{X}\,\mathsf{G}\,\mathsf{F}\,p$

LTL $\mapsto$ GBA (przykład 2)

$$\theta_n = \neg((\mathsf{G}\,\mathsf{F}\,p_1 \wedge \ldots \wedge \mathsf{G}\,\mathsf{F}\,p_n) \implies \mathsf{G}\,(q \implies \mathsf{F}\,r)) \equiv$$

$$\mathsf{G}\,\mathsf{F}\,p_1 \wedge \ldots \wedge \mathsf{G}\,\mathsf{F}\,p_n \wedge \mathsf{F}\,(q \wedge \mathsf{G}\,\neg r)$$

LTL $\mapsto$ GBA (przykład 2)

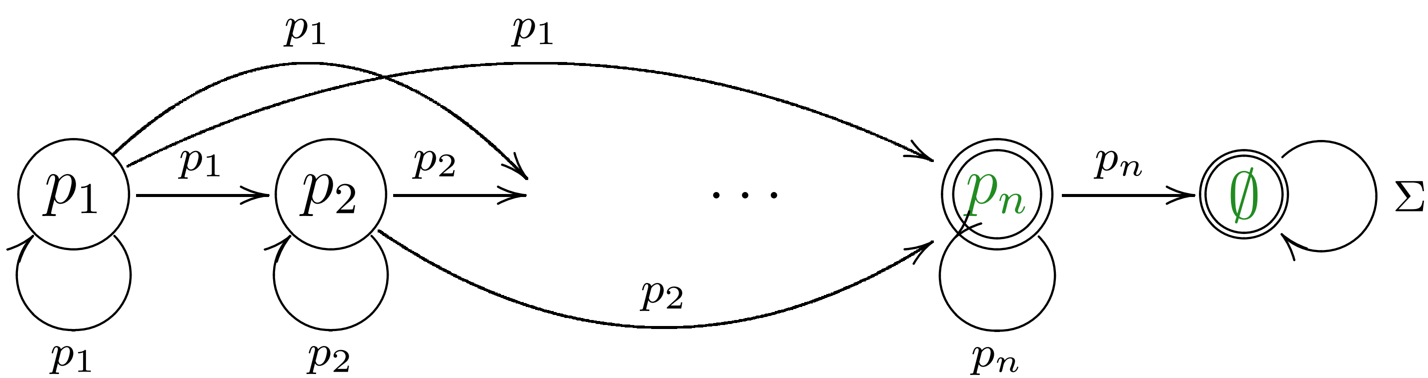
$$\theta_n = \neg((\mathsf{G}\,\mathsf{F}\,p_1 \wedge \ldots \wedge \mathsf{G}\,\mathsf{F}\,p_n) \implies \mathsf{G}\,(q \implies \mathsf{F}\,r))$$

	Spin		Wring		EQLTL	LTL2BA–		LTL2BA	
	time	space	time	space	time	time	space	time	space
θ_1	0.18	460	0.56	4,100	16	0.01	9	0.01	9
θ_2	4.6	4,200	2.6	4,100	16	0.01	19	0.01	11
θ_3	170	52,000	16	4,200	18	0.01	86	0.01	19
θ_4	9,600	970,000	110	4,700	25	0.07	336	0.06	38
θ_5			1,000	6,500	135	0.70	1,600	0.37	48
θ_6			8,400	13,000	N/A	12	8,300	4.0	88
θ_7			72,000†	43,000†		220	44,000	32	175
θ_8						4,200	260,000	360	250
θ_9						97,000	1,600,000	3,000	490
θ_{10}								36,000	970

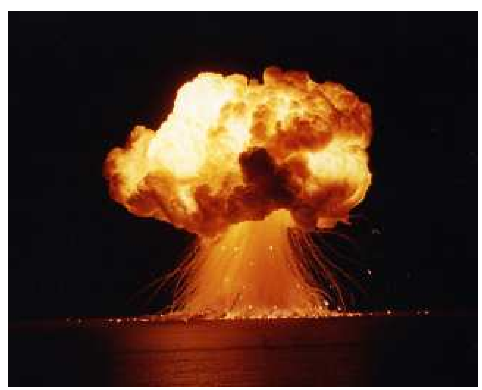
[Gastin,Oddoux 2001]

LTL $\mapsto$ GBA (przykład 3)

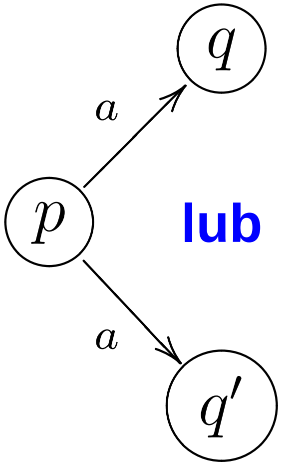
$$\phi_n \;=\; p_1 \,\mathsf{U}\, (p_2 \,\mathsf{U}\, (\ldots \,\mathsf{U}\, p_n) \ldots)$$

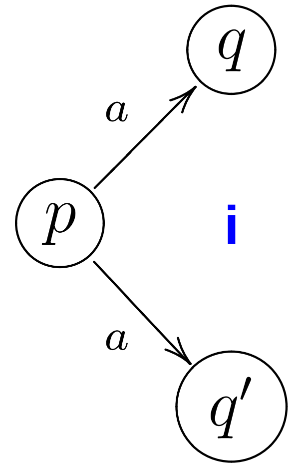


$$\theta_n \;=\; \neg\big(p_1 \,\mathsf{U}\, (p_2 \,\mathsf{U}\, (\ldots \,\mathsf{U}\, p_n) \ldots)\big)$$



III. LTL $\longmapsto$ ABA





$\sigma(p,a) \ = \ q \vee q'$

$\sigma(p,a) \ = \ q \wedge q'$

$(p,a,q),(p,a,q') \in \sigma$

—

Np.: $\sigma(p,a) \ = \ p_1 \ \vee \ p_2 \wedge p_3$ (DNF)

Pytanie: **bieg = ?**

ABA $\mathcal{A}_\phi = \langle \Sigma, S, S_{\text{pocz}}, \sigma, F \rangle$:

- $S =$ modalne podformuły ($\mathsf{X}\,\alpha,\ \alpha\,\mathsf{U}\,\beta,\ \alpha\,\mathsf{R}\,\beta$) i literały ($p,\ \neg p$)
- $S_{\text{pocz}} =$ dziś(ϕ)
- $\sigma : S \times \Sigma \to \text{Bool}^+(S)$

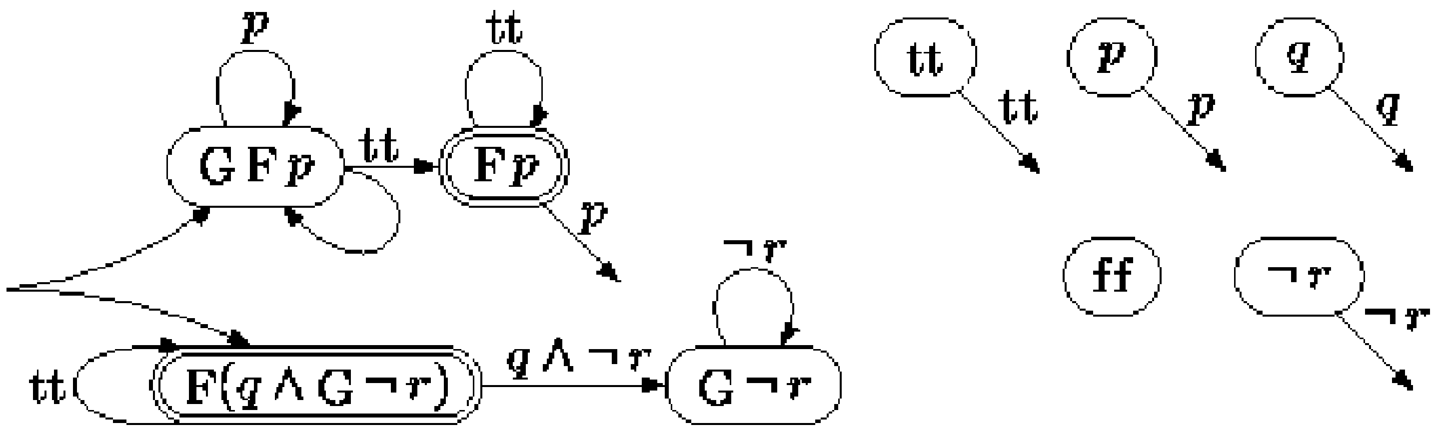
$$
\begin{array}{lcl}
\sigma(p, A) & = & \texttt{true},\ \text{o ile}\ p \in A,\ \text{wpp.}\ \texttt{false} \\
\sigma(\neg p, A) & = & \texttt{true},\ \text{o ile}\ p \notin A,\ \text{wpp.}\ \texttt{false} \\
\sigma(\mathsf{X}\,\alpha, A) & = & \alpha \qquad \text{!!!} \\
\sigma(\alpha\,\mathsf{U}\,\beta, A) & = & \sigma(\beta, A) \ \vee \ (\sigma(\alpha, A) \ \wedge \ \alpha\,\mathsf{U}\,\beta) \\
\sigma(\alpha\,\mathsf{R}\,\beta, A) & = & \sigma(\beta, A) \ \wedge \ (\sigma(\alpha, A) \ \vee \ \alpha\,\mathsf{R}\,\beta)
\end{array}
$$

$$\sigma(\mathsf{F}\,\alpha, A) = \sigma(\alpha, A) \ \vee \ \mathsf{F}\,\alpha$$

$$\sigma(\mathsf{G}\,\alpha, A) = \sigma(\alpha, A) \ \wedge \ \mathsf{G}\,\alpha$$

LTL $\mapsto$ ABA (przykład)

$$\phi = \neg(\mathsf{G}\,\mathsf{F}\,p \implies \mathsf{G}\,(q \implies \mathsf{F}\,r)) \equiv \mathsf{G}\,\mathsf{F}\,p \wedge \mathsf{F}\,(q \wedge \mathsf{G}\,\neg r)$$



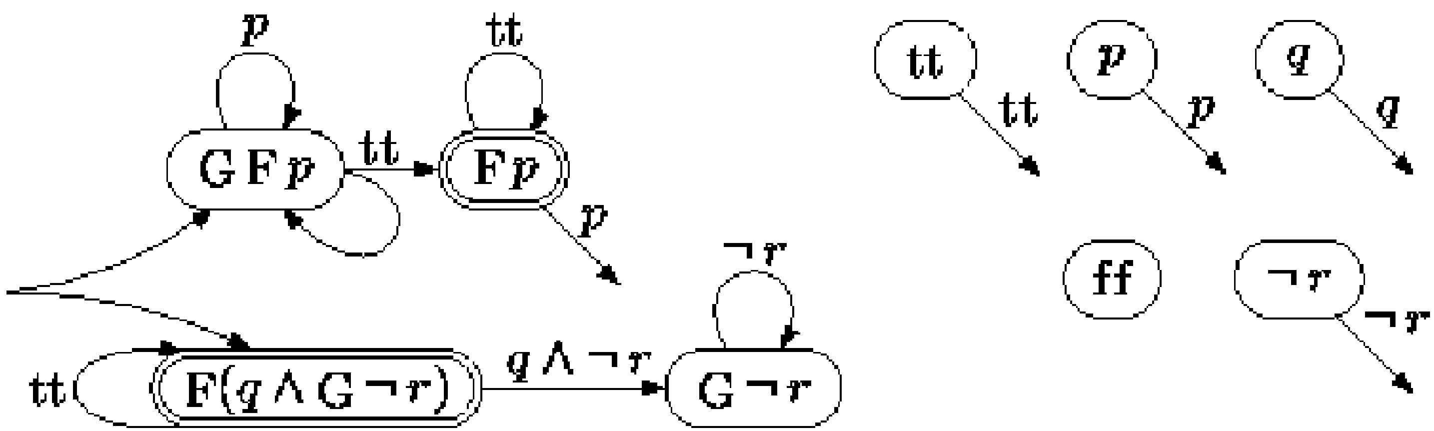
[Gastin,Oddoux 2001]

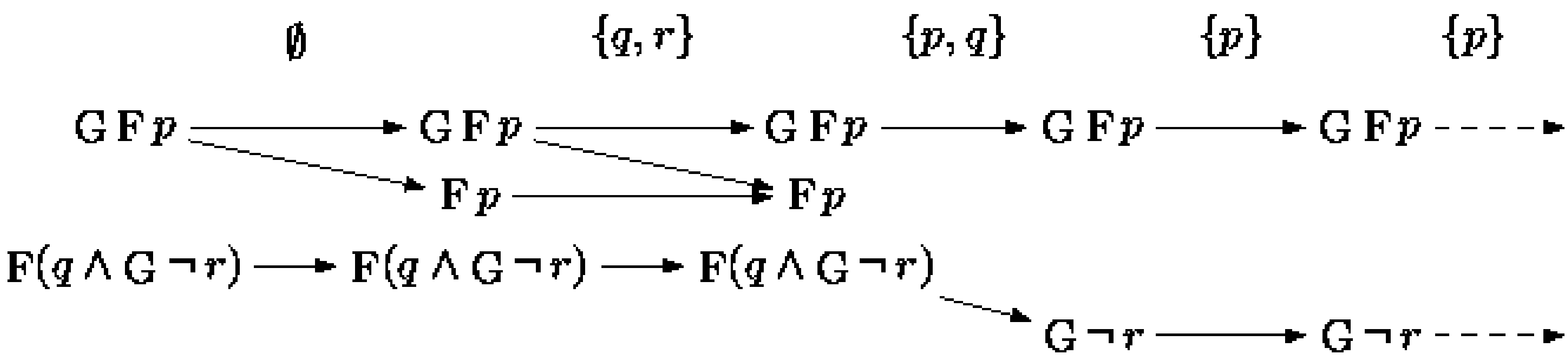
$$\mathsf{dnf}(\,\mathsf{F}\,(q \wedge \mathsf{G}\,\neg r)) = \mathsf{X}\,\mathsf{F}\,(q \wedge \mathsf{G}\,\neg r) \vee (q \wedge \neg r \wedge \mathsf{X}\,\mathsf{G}\,\neg r)$$

$$\mathsf{dnf}(\,\mathsf{G}\,\mathsf{F}\,p) = (p \wedge \mathsf{X}\,\mathsf{G}\,\mathsf{F}\,p) \vee (\mathsf{X}\,\mathsf{F}\,p \wedge \mathsf{X}\,\mathsf{G}\,\mathsf{F}\,p)$$

LTL $\mapsto$ ABA (przykład)

$$\phi = \neg(\mathsf{G}\,\mathsf{F}\,p \implies G(q \implies \mathsf{F}\,r)) \equiv \mathsf{G}\,\mathsf{F}\,p \wedge \mathsf{F}(q \wedge \mathsf{G}\neg r)$$





[Gastin,Oddoux 2001]

ABA $\mathcal{A}_\phi = \langle \Sigma, S, S_{\text{pocz}}, \sigma, F \rangle$:

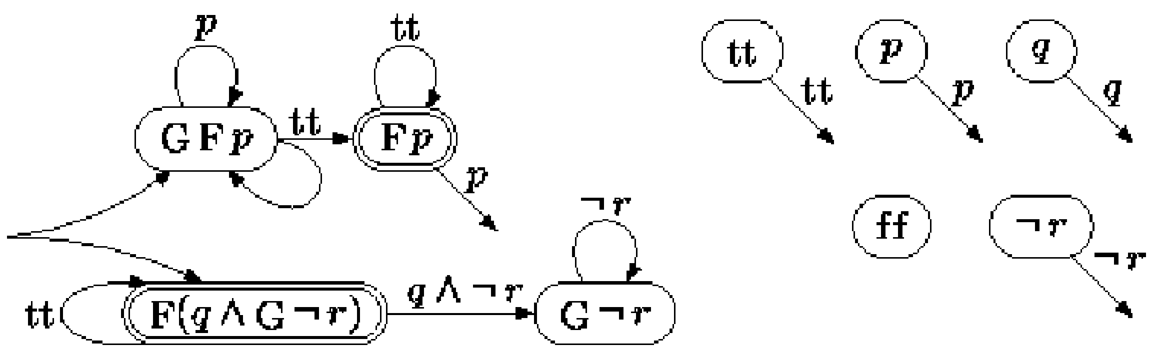
- S = modalne podformuły ($\mathsf{X}\,\alpha$, $\alpha\,\mathsf{U}\,\beta$, $\alpha\,\mathsf{R}\,\beta$)
  i literały (p, $\neg p$)
- S_{pocz} = dziś(ϕ)
- $\sigma : S \times \Sigma \to \text{Bool}^+(S)$

…

- $F = \{\alpha\,\mathsf{R}\,\beta\}$

LTL a ω-automaty

$$\begin{tikzcd} \text{LTL} \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & \text{LTL} + \exists \arrow[d, equal] \\ \text{liniowe alternujące } \omega\text{-automaty} \arrow[r, hook] & \text{alternujące } \omega\text{-automaty} \end{tikzcd}$$



[Gastin,Oddoux 2001]

IV. Języki ω-regularne

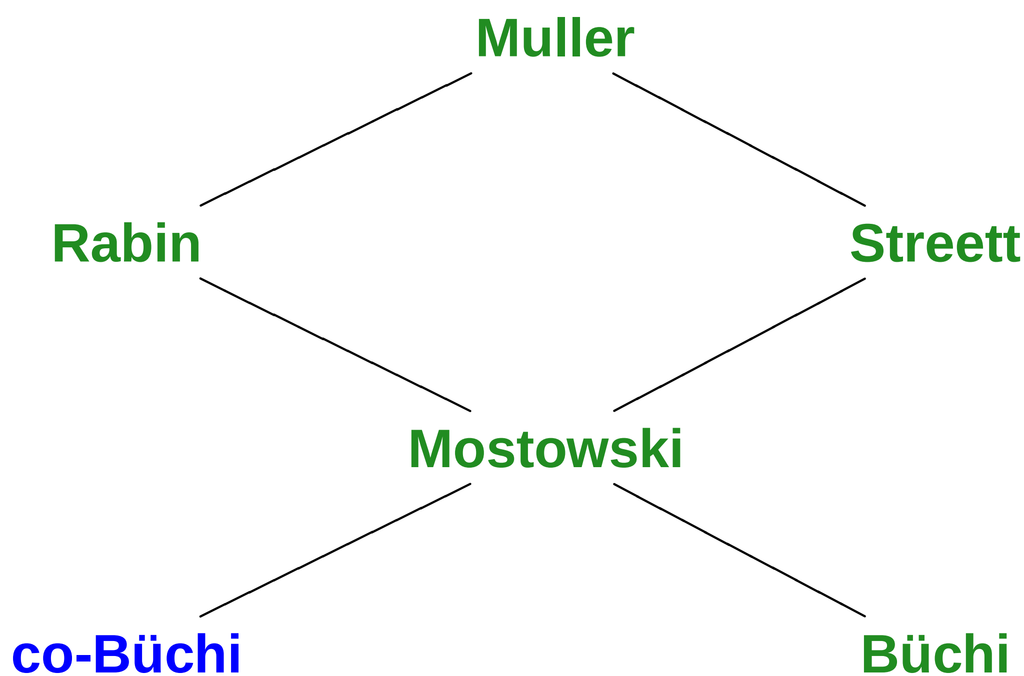
Inne warunki akceptacji

- **Büchi:** j.w.
- **co-Büchi:** j.w.
- **Muller:** $F \subseteq \mathcal{P}(Q)$

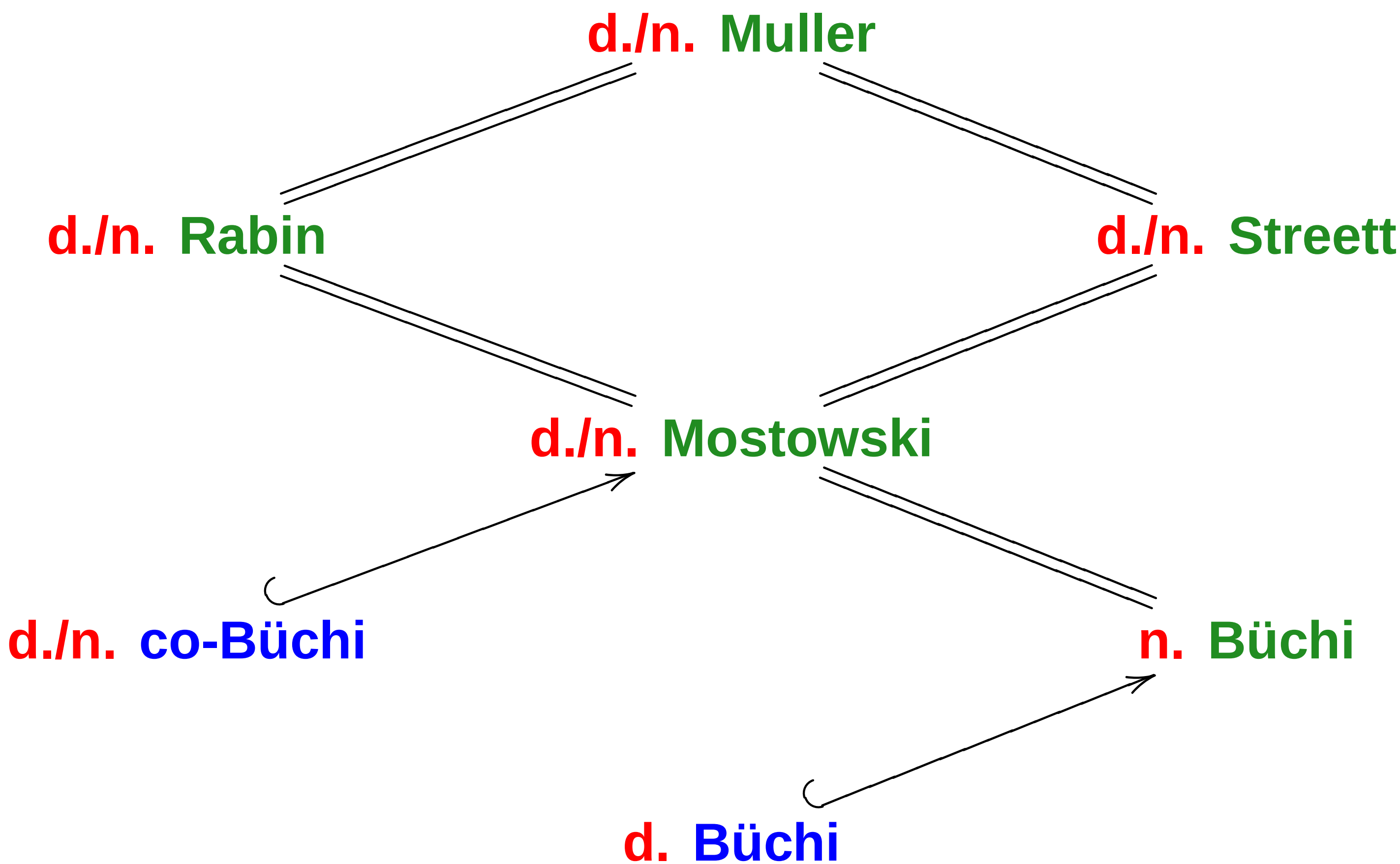
  r akceptujący $\iff \inf(r) \in F$
- **Rabin:** $F = \{(E_1, F_1), \ldots, (E_n, F_n)\} \subseteq \mathcal{P}(Q) \times \mathcal{P}(Q)$

  r akceptujący $\iff \exists i.\ \inf(r) \subseteq E_i \wedge \inf(r) \cap F_i \neq \emptyset$
- **Streett:** = co-Rabin
- **Mostowski (warunek parzystości):** . . .

Inne warunki akceptacji



$$\begin{tikzcd}
& \text{n. Muller} \arrow[dl, equal] \arrow[dr, equal] & \\
\text{n. Rabin} \arrow[dr, equal] & & \text{n. Streett} \arrow[dl, equal] \\
& \text{n. Mostowski} \arrow[dr, equal] & \\
\text{n. co-Büchi} \arrow[ur, hook] & & \text{n. Büchi}
\end{tikzcd}$$


d./n. Muller
d./n. Rabin
d./n. Streett
d./n. Mostowski
d./n. co-Büchi
n. Büchi
d. Büchi

Języki ω-regularne: równoważne definicje

– niedeterministyczne ω-automaty

– wyrażenia ω-regularne: $\bigcup_{i=1}^{n} L_i \cdot K_i^{\omega}$

– S1S = FO + $\exists$ (drugiego rzędu)

– LTL + $\exists$, np. $\exists a.\ Fa \wedge G(a \implies (XFb \wedge \mathsf{X}\, Fa)$

– rachunek μ na ω-słowach

– alternujące ω-automaty

– słabe alternujące ω-automaty

– ...