Weryfikacja wspomagana komputerowo

Wykład 2: LTL

Struktura Kripkego

Def.: Struktura Kripkego $M = \langle S, S_{\text{pocz}}, \rightarrow, L \rangle$

- $S_{\text{pocz}} \subseteq S$ niepusty zbiór stanów początkowych
- $\rightarrow \subseteq S \times S$ relacja przejścia
- $L : S \rightarrow \mathcal{P}(P)$, P - zmienne zdaniowe (własności atomowe)

Często zakładamy, że $\rightarrow$ jest całkowita: brak blokady!

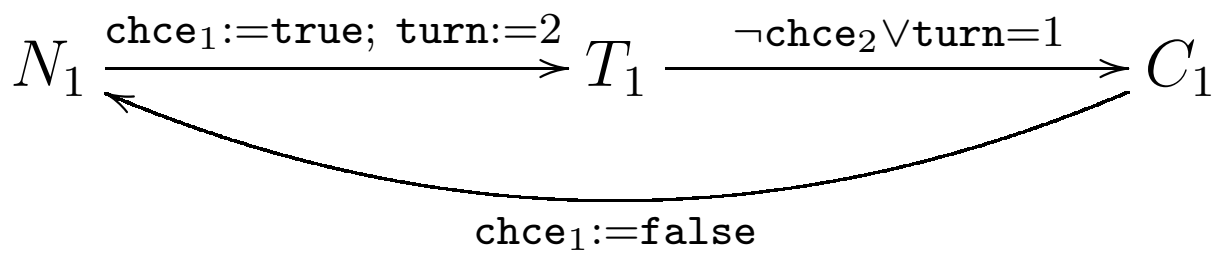
$$\forall s \in S.\ \exists s' \in S.\ s \rightarrow s'$$

Abstrakcja: program $\mapsto$ struktura Kripkego

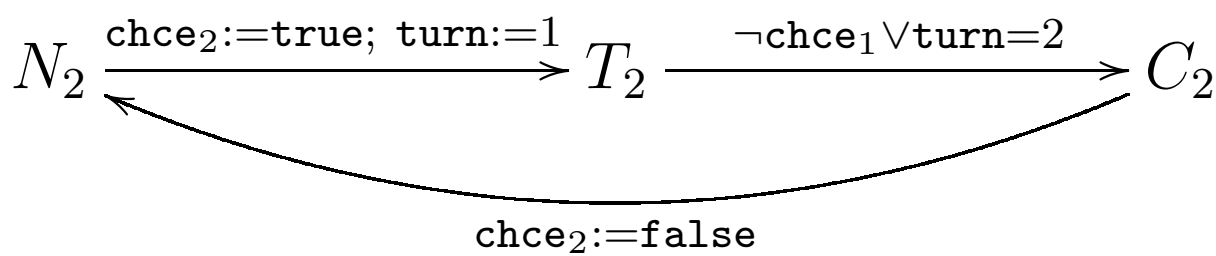
- N_i własne sprawy
- T_i próbuję wejść do sekcji krytycznej
- C_i sekcja krytyczna

$$\text{Proc}_1 \mid \text{Proc}_2$$

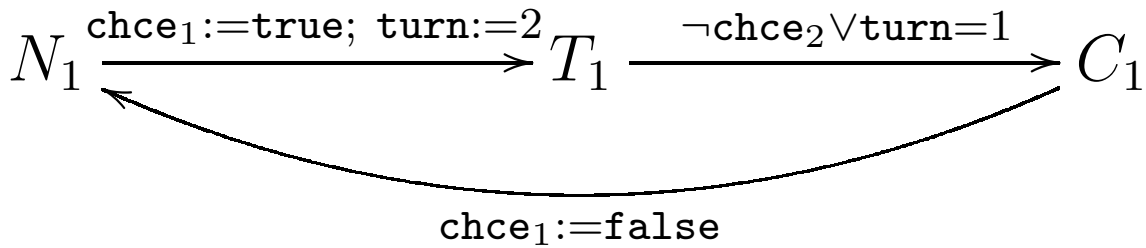
Proc_1 :

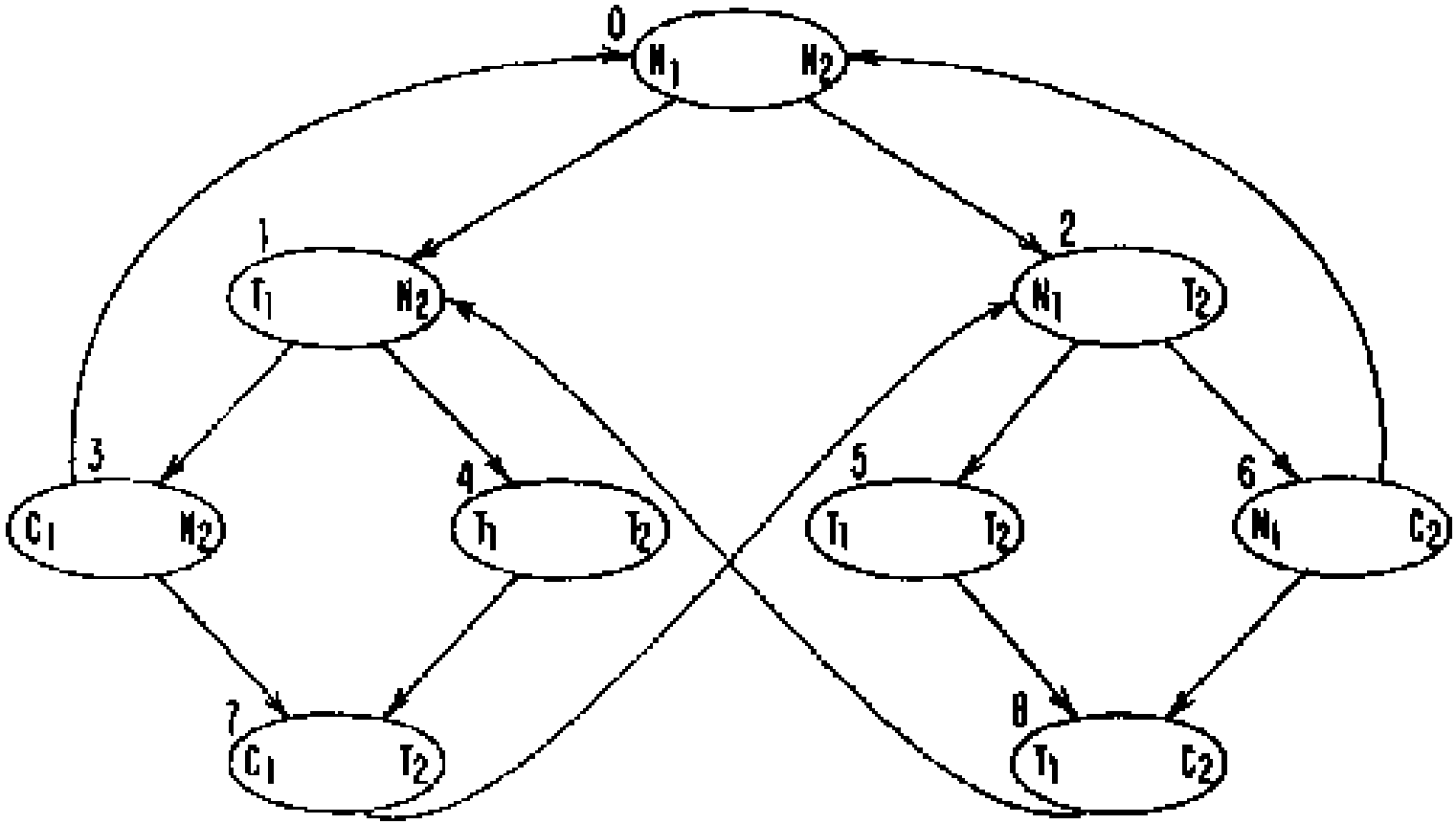


Proc_2 :

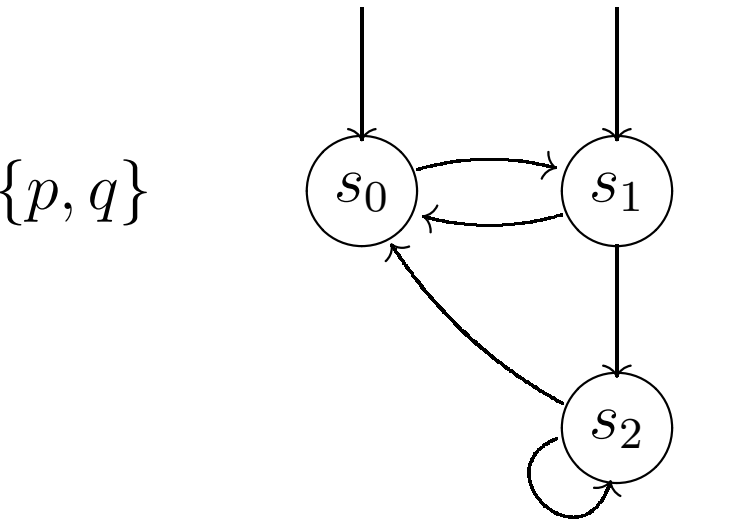


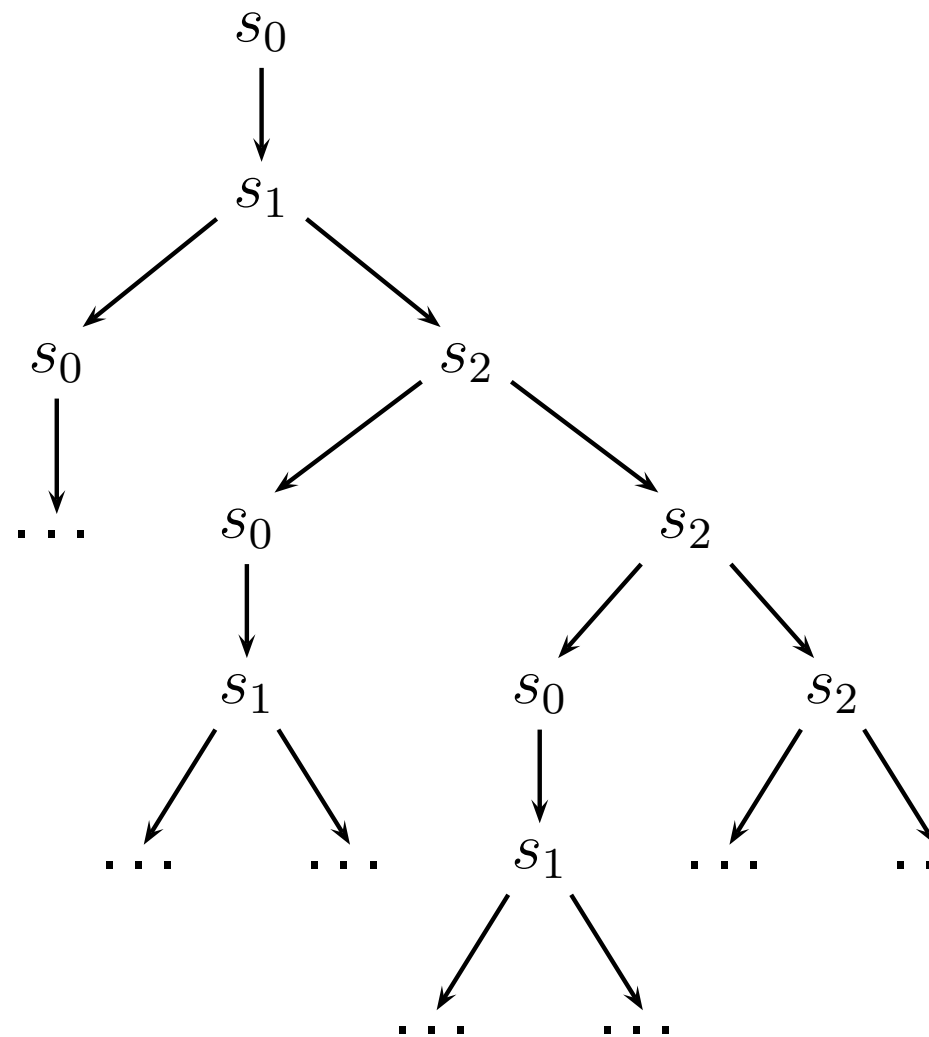
Abstrakcja: program $\mapsto$ struktura Kripkego



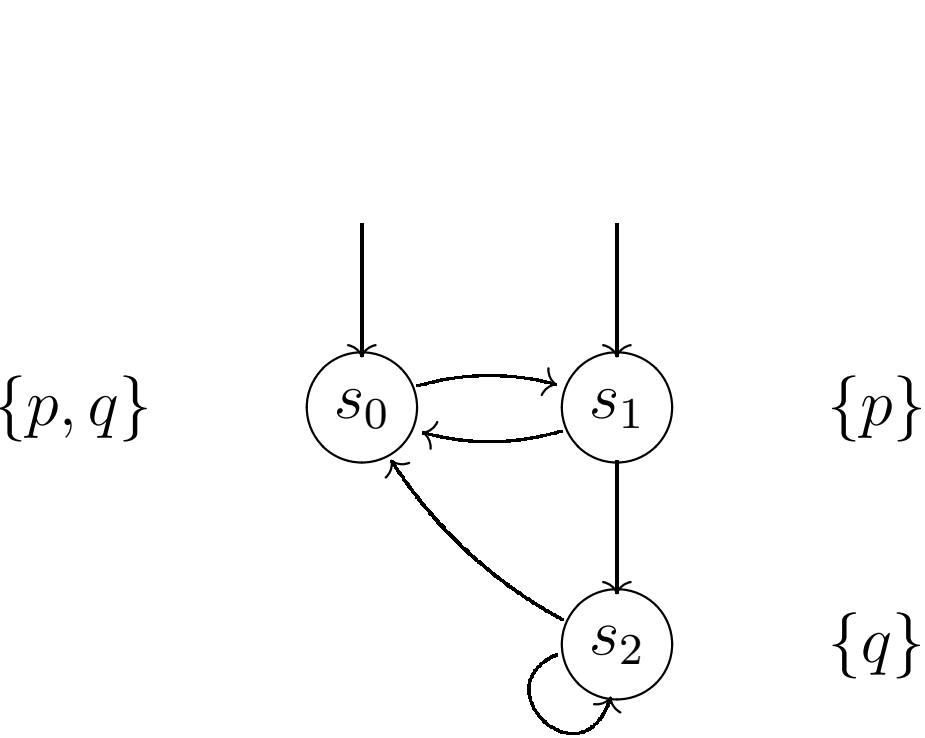


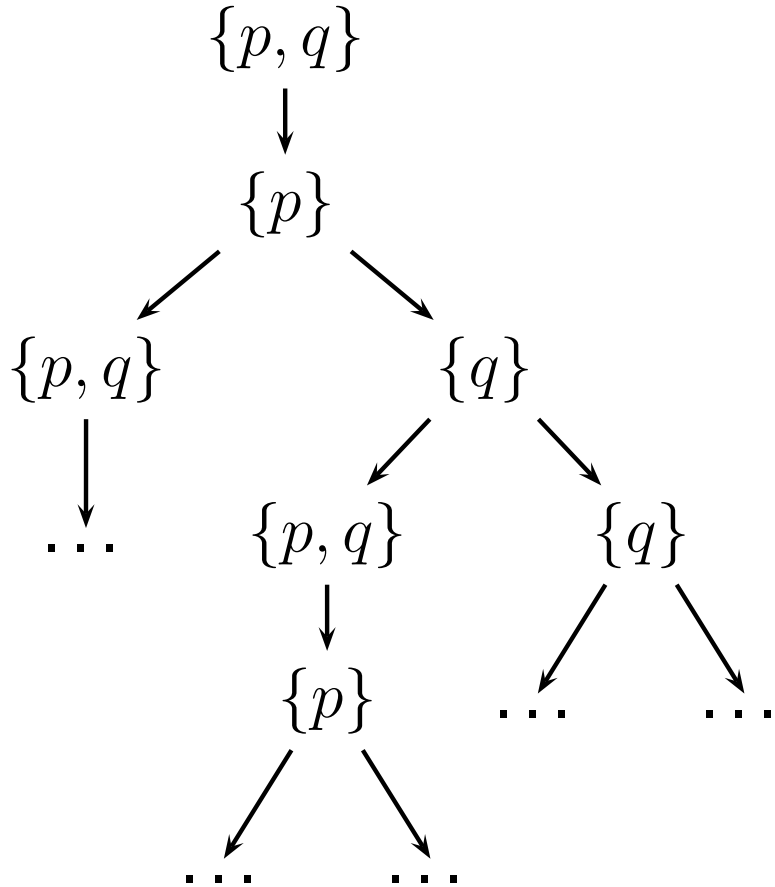
Struktura Kripkego $\mapsto$ drzewo





Struktura Kripkego $\mapsto$ drzewo





Ścieżki

Def.: Ścieżka (przebieg) to maksymalny ciąg

$$\Pi \quad = \quad s_0 \to s_1 \to s_2 \to \dots$$

Ozn.: $|\Pi|$ – liczba stanów w Π

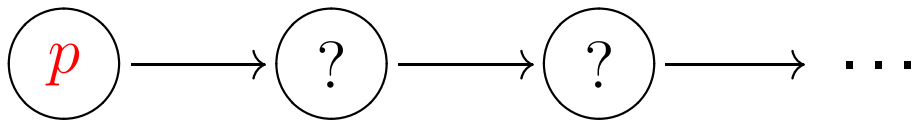
LTL wyraża własności ścieżek. Na strukturze Kripkego M, formułę $\phi \in$ LTL interpretujemy następująco:
dla każdej ścieżki takiej, że $s_0 \in S_{\text{pocz}}$, zachodzi ϕ.

Ozn.: $M \vDash \phi$, $\Pi \vDash \phi$

Def.: LTL (Linear Temporal Logic)

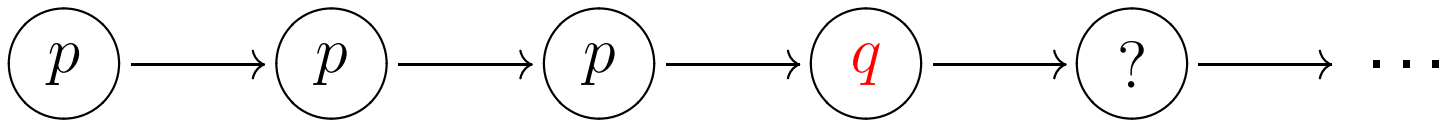
$$\phi \quad := \quad p \mid \neg\phi \mid \phi_1 \wedge \phi_2 \mid \mathsf{X}\,\phi \mid \phi_1 \,\mathsf{U}\, \phi_2$$

p



$\mathsf{X}\,p$

$p \,\mathsf{U}\, q$



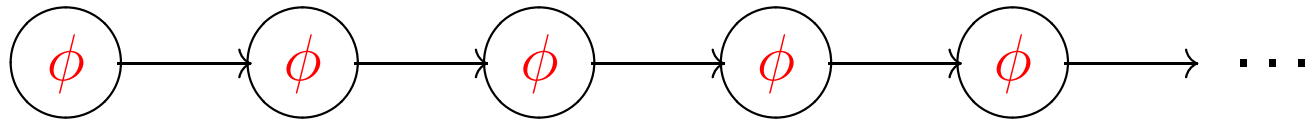
Przykład:

$$\neg\texttt{starts}\ \mathsf{U}\ \texttt{key}, \qquad \neg\texttt{starts}\ \mathsf{U}\ \neg\texttt{starts} \wedge \texttt{key}$$

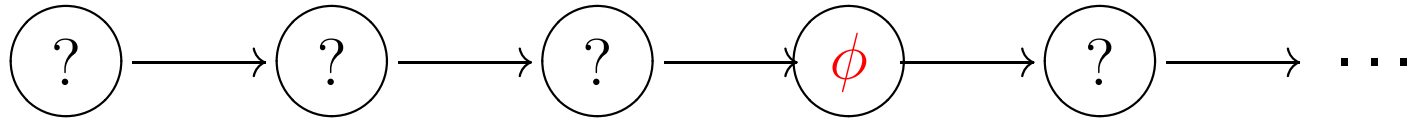
LTL - zawsze, kiedyś

Pytanie: Jak zapisać

zawsze ϕ



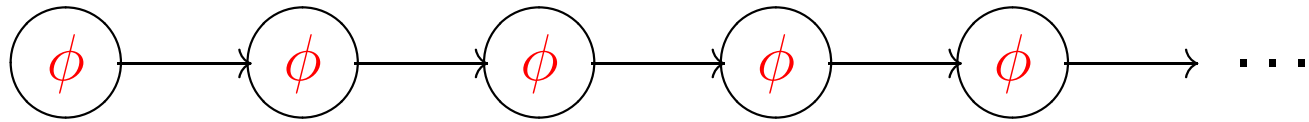
kiedyś ϕ



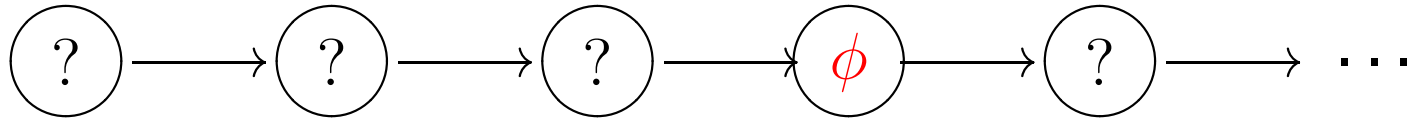
LTL - zawsze, kiedyś

Pytanie: Jak zapisać

zawsze ϕ



kiedyś ϕ



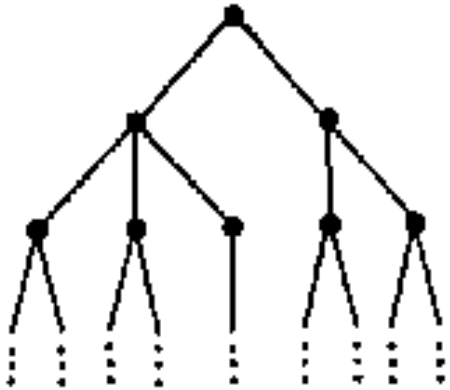
Notacja:

$$\mathsf{F}\,\phi \;\equiv\; \mathtt{true}\,\mathsf{U}\,\phi$$

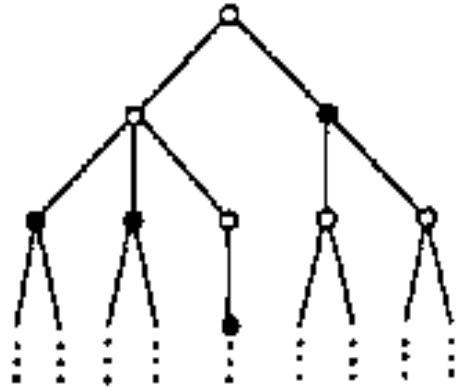
$$\mathsf{G}\,\phi \;\equiv\; \neg\,\mathsf{F}\,\neg\phi$$

$$\phi_1 \vee \phi_2 \;\equiv\; \neg(\neg\phi_1 \wedge \neg\phi_2)$$

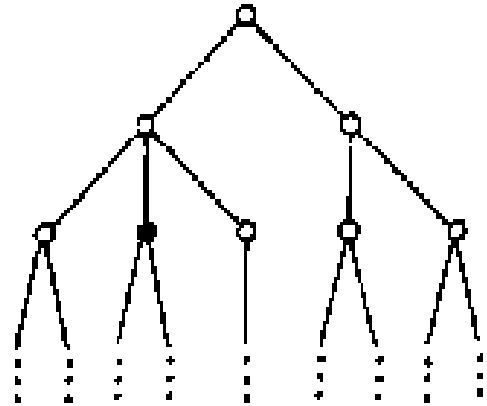
Typowe własności



bezpieczeństwo



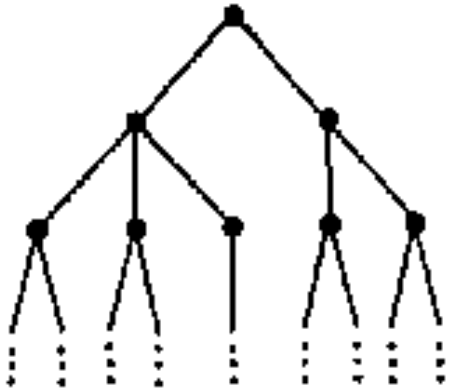
żywotność



możliwość

?

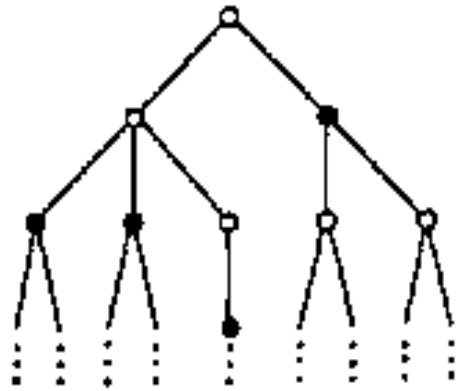
Typowe własności



bezpieczeństwo

$\mathsf{G}\,\phi$

$\mathsf{G}\,\neg(\mathtt{cr}_1 \wedge \mathtt{cr}_2)$

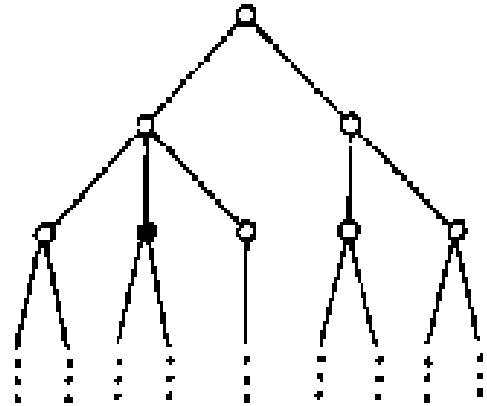


żywotność

?

$\mathsf{F}\,\phi$

$\mathsf{F}\,\mathtt{granted}$



możliwość

$\mathsf{G}\,\neg\phi$

$\neg\,\mathsf{G}\,\neg\phi$

$\mathsf{G}\,\neg\mathtt{occ}$

LTL – semantyka

Semantyka: $\Pi = s_0 \to s_1 \to s_2 \to \ldots$

$\Pi \models p$ wtw gdy $p \in L(s_0)$

$\Pi \models \neg\phi$ wtw gdy $\ldots$

$\Pi \models \phi_1 \wedge \phi_2$ wtw gdy $\ldots$

$\Pi \models \mathsf{X}\,\phi$ wtw gdy $\Pi^1 \models \phi$, gdzie $\Pi^i = s_i \to s_{i+1} \to s_{i+2} \to \ldots$

$\Pi \models \phi_1 \,\mathsf{U}\, \phi_2$ wtw gdy $\exists i < |\Pi|.\ \Pi^i \models \phi_2 \ \wedge\ \forall j < i.\ \Pi^j \models \phi_1$

Przykładowe własności

- nieskończenie wiele razy ϕ ?
- prawie zawsze ϕ ?
- „słaby” U : ϕ_1 W ϕ_2 (ϕ_2 niekoniecznie) ?
- jeśli `req` to w przyszłości `granted` ?

Przykładowe własności

- nieskończenie wiele razy ϕ $\mathsf{G}\,\mathsf{F}\,\phi$
- prawie zawsze ϕ $\mathsf{F}\,\mathsf{G}\,\phi$
- „słaby” $\phi_1\,\mathsf{U}\,\phi_2$: ϕ_2 nieobowiązkowo $\mathsf{G}\,\phi_1 \vee \phi_1\,\mathsf{U}\,\phi_2$
- jeśli `req` to w przyszłości `granted`

$$\mathsf{G}\,(\texttt{req} \implies \mathsf{X}\,\mathsf{F}\,\texttt{granted})$$

- sprawiedliwość: jeśli uparcie `req` to `granted`

  „słaba”: uparcie = prawie zawsze ?

  „silna”: uparcie = nieskończenie wiele ?

Przykładowe własności

- nieskończenie wiele razy ϕ $\quad \mathsf{G}\,\mathsf{F}\,\phi$
- prawie zawsze ϕ $\quad \mathsf{F}\,\mathsf{G}\,\phi$
- „słaby” $\phi_1\,\mathsf{U}\,\phi_2$: ϕ_2 nieobowiązkowo $\quad \mathsf{G}\,\phi_1 \vee \phi_1\,\mathsf{U}\,\phi_2$
- jeśli `req` to w przyszłości `granted`

$$\mathsf{G}\,(\texttt{req} \implies \mathsf{X}\,\mathsf{F}\,\texttt{granted})$$

- sprawiedliwość: jeśli uparcie `req` to `granted`

  „słaba”: uparcie = pr. zawsze $\quad \mathsf{F}\,\mathsf{G}\,\texttt{req} \implies \mathsf{F}\,\texttt{granted}$

  „silna”: uparcie = niesk. wiele $\quad \mathsf{G}\,\mathsf{F}\,\texttt{req} \implies \mathsf{F}\,\texttt{granted}$

Sprawiedliwość

(jeśli uparcie `req` to `granted`)

Wariant 1

„słaba”: uparcie = pr. zawsze $\mathsf{F}\,\mathsf{G}\,\mathtt{req} \implies \mathsf{F}\,\mathtt{granted}$

„silna”: uparcie = niesk. wiele $\mathsf{G}\,\mathsf{F}\,\mathtt{req} \implies \mathsf{F}\,\mathtt{granted}$

Wariant 2

„słaba”:

$$\mathsf{F}\,\mathsf{G}\,\mathtt{req} \implies \mathsf{G}\,\mathsf{F}\,\mathtt{granted} = \mathsf{G}(\mathsf{F}\,\mathsf{G}\,\mathtt{req} \implies \mathsf{F}\,\mathtt{granted})$$

„silna”:

$$\mathsf{G}\,\mathsf{F}\,\mathtt{req} \implies \mathsf{G}\,\mathsf{F}\,\mathtt{granted} = \mathsf{G}(\mathsf{G}\,\mathsf{F}\,\mathtt{req} \implies \mathsf{F}\,\mathtt{granted})$$

Prawa de Morgane'a

$$\phi_1 \vee \phi_2 \equiv \neg(\neg\phi_1 \wedge \neg\phi_2)$$

$$? \equiv \neg \mathsf{X} \neg\phi$$

$$\mathsf{G}\,\phi \equiv \neg \mathsf{F} \neg\phi$$

Prawa de Morgane'a

$$\phi_1 \vee \phi_2 \equiv \neg(\neg\phi_1 \wedge \neg\phi_2)$$

$$\mathsf{X}\,\phi \equiv \neg\,\mathsf{X}\,\neg\phi$$

$$\mathsf{G}\,\phi \equiv \neg\,\mathsf{F}\,\neg\phi$$

$$? \equiv \neg(\neg\phi\,\mathsf{U}\,\neg\psi)$$

Prawa de Morgane'a

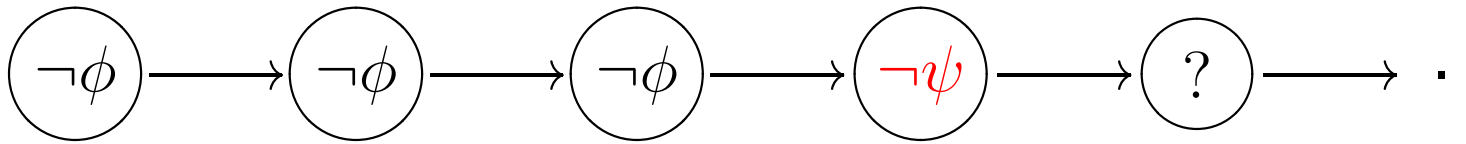
$\phi_1 \vee \phi_2 \equiv \neg(\neg\phi_1 \wedge \neg\phi_2)$

$\mathsf{X}\,\phi \equiv \neg\,\mathsf{X}\,\neg\phi$

$\mathsf{G}\,\phi \equiv \neg\,\mathsf{F}\,\neg\phi$

$\phi\,\mathsf{R}\,\psi \equiv \neg(\neg\phi\,\mathsf{U}\,\neg\psi)$

$\neg\phi\,\mathsf{U}\,\neg\psi$



$\Pi \models \phi\,\mathsf{R}\,\psi$ wtw gdy ?

Prawa de Morgane'a

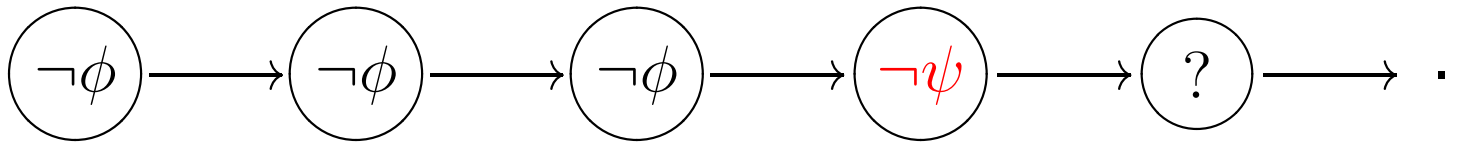
$$\phi_1 \vee \phi_2 \equiv \neg(\neg\phi_1 \wedge \neg\phi_2)$$

$$\mathsf{X}\,\phi \equiv \neg\,\mathsf{X}\,\neg\phi$$

$$\mathsf{G}\,\phi \equiv \neg\,\mathsf{F}\,\neg\phi$$

$$\phi\,\mathsf{R}\,\psi \equiv \neg(\neg\phi\,\mathsf{U}\,\neg\psi)$$

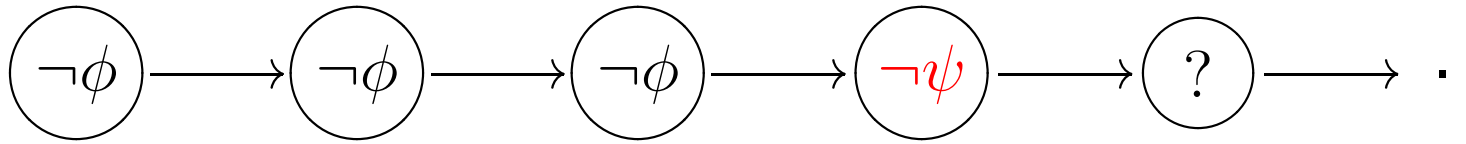
$\neg\phi\,\mathsf{U}\,\neg\psi$



$\Pi \vDash \phi\,\mathsf{R}\,\psi$ wtw gdy $\forall i < |\Pi|.\ (\forall j < i.\ \Pi^j \vDash \neg\phi) \implies \Pi^i \vDash \psi$

U versus R

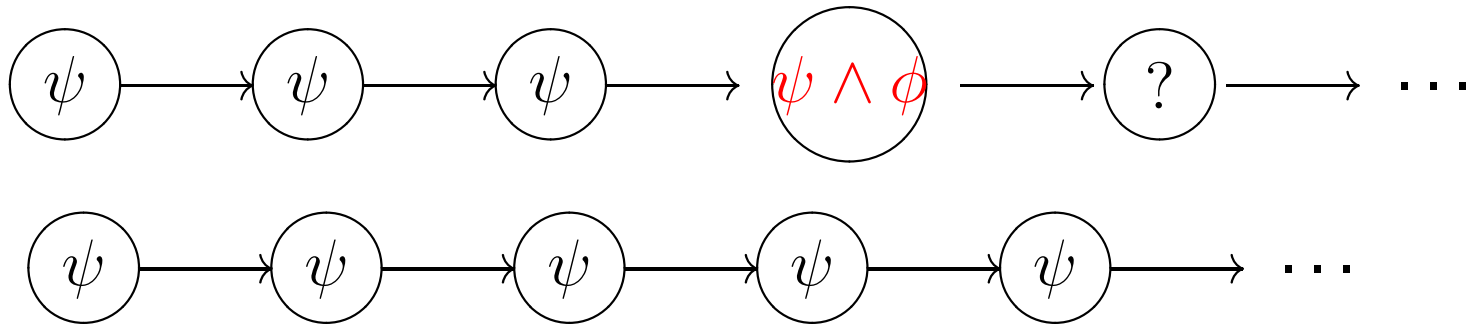
$\neg\phi \,\mathsf{U}\, \neg\psi$



$\phi \,\mathsf{R}\, \psi \;\equiv\; \neg(\neg\phi \,\mathsf{U}\, \neg\psi)$

$\Pi \vDash \phi \,\mathsf{R}\, \psi$ wtw gdy $\forall i < |\Pi|.\ (\forall j < i.\ \Pi^j \vDash \neg\phi) \implies \Pi^i \vDash \psi$

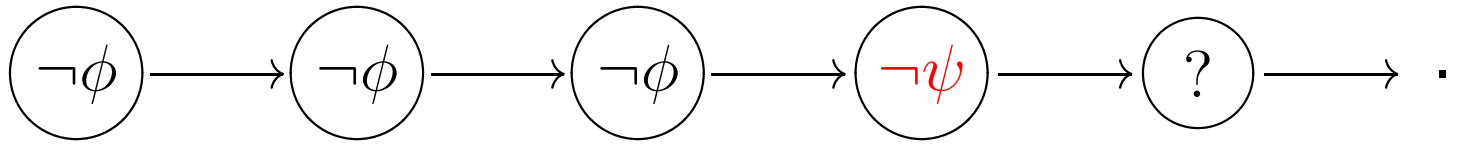
$\phi \,\mathsf{R}\, \psi$



$\phi \,\mathsf{R}\, \psi \;\equiv\; \neg(\neg\phi \,\mathsf{U}\, \neg\psi) \;\equiv\; \psi \,\mathsf{U}\, (\psi \wedge \phi) \vee \mathsf{G}\, \psi \;\equiv\; \psi \,\mathsf{W}\, (\psi \wedge \phi)$

U versus R

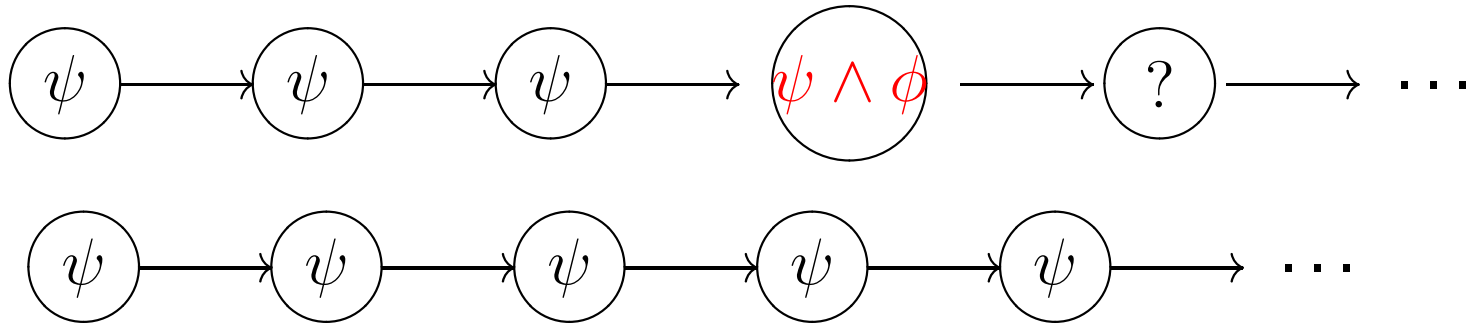
$\neg\phi \,\mathsf{U}\, \neg\psi$



$\phi \,\mathsf{R}\, \psi \;\equiv\; \neg(\neg\phi \,\mathsf{U}\, \neg\psi)$

$\Pi \models \phi \,\mathsf{R}\, \psi$ wtw gdy $\forall i < |\Pi|.\ (\forall j < i.\ \Pi^j \models \neg\phi) \implies \Pi^i \models \psi$

$\phi \,\mathsf{R}\, \psi$



$\phi \,\mathsf{R}\, \psi \;\equiv\; \neg(\neg\phi \,\mathsf{U}\, \neg\psi) \;\equiv\; \psi \,\mathsf{U}\, (\psi \wedge \phi) \vee \mathsf{G}\, \psi \;\equiv\; \psi \,\mathsf{W}\, (\psi \wedge \phi)$

– U i R jako punty stałe . . .

Spychanie negacji

$$\neg(\phi_1 \wedge \phi_2) \equiv \neg\phi_1 \vee \neg\phi_2$$

$$\neg \mathsf{F}\,\phi \equiv \mathsf{G}\,\neg\phi$$

$$\neg \mathsf{G}\,\phi \equiv \mathsf{F}\,\neg\phi$$

$$\neg \mathsf{X}\,\phi \equiv \mathsf{X}\,\neg\phi$$

Spychanie negacji

$$\neg(\phi_1 \wedge \phi_2) \equiv \neg\phi_1 \vee \neg\phi_2$$

$$\neg \mathsf{F}\,\phi \equiv \mathsf{G}\,\neg\phi$$

$$\neg \mathsf{G}\,\phi \equiv \mathsf{F}\,\neg\phi$$

$$\neg \mathsf{X}\,\phi \equiv \mathsf{X}\,\neg\phi$$

$$\neg(\phi\,\mathsf{U}\,\psi) \equiv (\phi \wedge \neg\psi)\,\mathsf{W}\,(\neg\phi \wedge \neg\psi)$$

dlaczego nie tak?

$$\neg(\phi\,\mathsf{U}\,\psi) \equiv \neg\phi\,\mathsf{R}\,\neg\psi$$

Napisz formułę . . .

(1) jeśli b to wcześniej było a ?

(1') . . . ściśle wcześniej . . . ?

(2) każde b jest poprzedzane przez a, ale po poprzednim b,

jeśli takie było ?

(3) naprzemienne bloki a i b („sztafeta") ?

Napisz formułę . . .

(1) jeśli b to wcześniej było a $\quad \mathsf{F}\, b \implies (\neg b\, \mathsf{U}\, a)$

$\equiv \neg b\, \mathsf{W}\, a \equiv Pr(a, b)$

(1') . . . ściśle wcześniej . . . $\quad \mathsf{F}\, b \implies (\neg b\, \mathsf{U}\, (a \wedge \neg b))$

$\equiv \neg b\, \mathsf{W}\, (a \wedge \neg b) \equiv a\, \mathsf{R}\, \neg b \equiv SPr(a, b)$

(2) każde b jest poprzedzane przez a, ale po poprzednim b,

jeśli takie było $\quad Pr(a, b) \wedge \mathsf{G}\, (b \implies \mathsf{X}\, Pr(a, b))$

(3) naprzemienne bloki a i b („sztafeta")

$\mathsf{G}\, (\ (a \implies a\, \mathsf{W}\, (\neg a \wedge b)) \wedge (b \implies \ldots)\ )$

Czego się nie da wyrazić?

(1) na każdej ścieżce osiągniemy stan taki, że

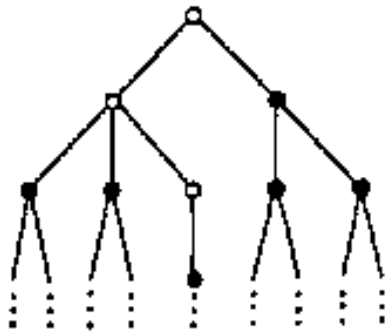
w każdym bezpośrednio następnym stanie ?

(na dowolnej ścieżce) zachodzi a

(1') możemy osiągnąć stan taki, że . . . ?

(2) na każdej ścieżce osiągniemy stan taki, że

w każdym następnym stanie zachodzi a ?



(obrazki. . .)

czego się nie da wyrazić?

(1) na każdej ścieżce osiągniemy stan taki, że

w każdym bezpośrednio następnym stanie F X a ?

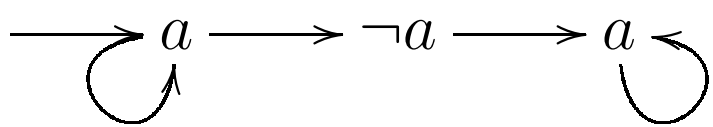
(na dowolnej ścieżce) zachodzi a

(1') możemy osiągnąć stan taki, że . . . ?

(2) na każdej ścieżce osiągniemy stan taki, że

w każdym następnym stanie zachodzi a F G a ?

za dużo!



$\models$ F G a

Czego się nie da wyrazić? (cd)

(3) even(a): na każdej parzystej pozycji jest a ?

(3') oddeven(a): na każdej parzystej pozycji jest a

a na każdej nieparzystej jest $\neg a$

$$\mathsf{G}\,(\,(a \implies \mathsf{X}\,\neg a) \wedge (\neg a \implies \mathsf{X}\,a)$$

(4) z każdego stanu osiągalnego można wrócić do stanu pocz. ?

Ekspresywność

Tw.: LTL = LTL(X, U) jest bardziej ekspresywny niż LTL(X, F)

Tw.: LTL = FO($\leq$, +1)

Tw.: Przeszłe spójniki logiczne:

$$U^{-1},\ \mathsf{F}^{-1},\ \mathsf{G}^{-1}$$

nie zmieniają siły wyrazu.

Tw.: LTL(F, G, F^{-1}, G^{-1}) = ?

Klasyfikacja własności

Def.: Własność = podzbiór $\mathcal{P}(P)^\omega$

Własność bezpieczeństwa X

decyzja negatywna zawsze po skończonej liczbie kroków

Def.: Własność = podzbiór $\mathcal{P}(P)^\omega$

Własność bezpieczeństwa X

decyzja negatywna zawsze po skończonej liczbie kroków

jeśli $\pi \notin X$ to istnieje prefiks $\rho < \pi$ t. że jeśli $\rho < \pi'$ to $\pi' \notin X$

Własność żywotności X

decyzja negatywna nigdy po skończonej liczbie kroków

dla każdego ρ istnieje $\pi > \rho$ t. że $\pi \in X$

Weryfikacja modelowa

PSPACE-zupełny

- dane: M, ϕ
- pytanie: $M \models \phi$?

Spełnialność

PSPACE-zupełny

- dane: ϕ
- pytanie: $\exists M.\ M \models \phi$?

Złożoność weryfikacji modelowej:

$$|M| \cdot 2^{\mathcal{O}(|\phi|)}$$

$2^{\mathcal{O}(|\phi|)}$ OK

$|M|$ za dużo!

Algorytm

(1) $M \mapsto \mathcal{A}_M$

(2) $\neg\phi \mapsto \mathcal{A}_{\neg\phi}$

LTL $\mapsto$ ω-automaty

(3) $L(\mathcal{A}_M \times \mathcal{A}_{\neg\phi}) = \emptyset?$

tak $\rightarrow$ $M \models \phi$

nie $\rightarrow$ $\neg(M \models \phi)$, kontrprzykład = ścieżka w M

Algorytm

(1) $M \mapsto \mathcal{A}_M$

(2) $\neg\phi \mapsto \mathcal{A}_{\neg\phi}$

LTL $\mapsto$ ω-automaty

(3) $L(\mathcal{A}_M \times \mathcal{A}_{\neg\phi}) = \emptyset?$

tak $\rightarrow$ $M \models \phi$

nie $\rightarrow$ $\neg(M \models \phi)$, kontrprzykład = ścieżka w M

$\phi = \mathsf{G}\,(p \implies \mathsf{X}\,\mathsf{F}\,q)$

$A_{\neg\phi} =$