6 Równoważność obserwacyjna

W tym rozdziale zajmiemy się relacją $=$, którą będziemy nazywać różnie: równość semantyczna, równoważność obserwacyjna, kongruencja obserwacyjna, itd. Jedyny problem z $\approx$ to fakt, że nie jest ona kongruencją (względem $\_ + \_$), zatem naszą intencją jest, aby $=$ była największą kongruencją zawartą w $\approx$. Definicja jest jednak inna i niesie więcej informacji:

Definicja 48 *$P = Q$ jeśli dla każdego $\alpha \in \mathrm{Act}$,*

$$
\begin{array}{ll}
(i) & P \xrightarrow{\alpha} P' \implies \exists Q' \;\; t.\dot{z}e \;\; Q \overset{\alpha}{\Longrightarrow} Q' \;\; i \;\; P' \approx Q' \\
(ii) & Q \xrightarrow{\alpha} Q' \implies \exists P' \;\; t.\dot{z}e \;\; P \overset{\alpha}{\Longrightarrow} P' \;\; i \;\; P' \approx Q'.
\end{array}
$$

Ćwiczenie 75 *Na podstawie definicji dowiedż inkluzji (23) wspomnianych w poprzednim rozdziale.*

Ćwiczenie 76 *Bezpośrednio z definicji wykaż, że zachodzą prawa (τ_1) – (τ_3) z rozdziału 3.*

Oczywiście $P \neq \tau.P$ w ogólności. Zachodzi natomiast poniższy fakt, pokazujący chyba najlepiej bliskość relacji $=$ i $\approx$:

Fakt 49 *$P \approx Q$ wtw. gdy $P = Q$ lub $P = \tau.Q$ lub $\tau.P = Q$.*

Dowód: $\Longleftarrow$: $= \subseteq \approx$.
$\Longrightarrow$: 3 przypadki:

(i) $P \xrightarrow{\tau} P' \approx Q$, dla pewnego P'. Wtedy $P = \tau.Q$.

(ii) Symetrycznie: $Q \xrightarrow{\tau} Q' \approx P$, dla pewnego Q'. Wtedy $\tau.P = Q$.

(iii) Wpp. $P = Q$.

□

Łatwo widać, bezpośrednio z definicji, że fakty 39 i 41 z poprzedniego rozdziału są prawdziwe.

Przypomnijmy, iż mamy jednoznaczność rozwiązań, sformułowaną w twierdzeniu 5 w rozdziale 3. Dowód tego twierdzenia pozostawiamy Czytelnikowi jako ćwiczenie.

6.1 Kongruencja

Fakt 50 *$P = Q$ wtw. gdy dla każdego procesu R, $P + R \approx Q + R$, przy założeniu, że istnieje $l \in \mathcal{L}$ t. że $l \notin \mathcal{L}(P) \cup \mathcal{L}(Q)$.*

Dowód: $\Longrightarrow$: Relacja $\{(P + R, Q + R) : P = Q\} \cup \approx$ jest słabą bisymulacją.
$\Longleftarrow$: Załóżmy, że $P \neq Q$, czyli dla pewnych α i P', mamy $P \xrightarrow{\alpha} P'$ i dla każdego Q', jeśli $Q \stackrel{\alpha}{\Longrightarrow} Q'$, to $P' \not\approx Q'$. Musimy wskazać R taki, że $P + R \not\approx Q + R$. Gdy $\alpha = \tau$, wystarczy $R \equiv 0$. Wpp. niech $R \equiv l.0$. Powinniśmy pokazać, że jeśli $Q + R \stackrel{\widehat{\alpha}}{\Longrightarrow} Q'$, dla jakiegoś Q', to $P' \not\approx Q'$. Jeśli $Q' \equiv Q + R$, to oczywiście $P' \not\approx Q'$, bo Q' ma l-potomka, a P' nie. Wpp. $Q + R \stackrel{\alpha}{\Longrightarrow} Q'$, zatem $Q \stackrel{\alpha}{\Longrightarrow} Q'$ i znów $P' \not\approx Q'$. □

Założenie, że istnieje $l \in \mathcal{L}$ t. że $l \notin \mathcal{L}(P) \cup \mathcal{L}(Q)$, można w rzeczywistości pominąć. Poniżej będziemy używać faktu 50 tak, jakby zachodził bez tego założenia.

Fakt 51 *$=$ jest kongruencją względem* wszystkich *operatorów.*

Ćwiczenie 77 *Korzystając z faktu 50 dowiedź, że $P + R = Q + R$ gdy $P = Q$.*

Ćwiczenie 78 *Korzystając z faktu 50 wykaż, że $=$ jest* największą *kongruencją zawartą w $\approx$.*

Tak jak dla silnej równoważności, chcielibyśmy posiadać swobodę przekształcania wyrażenia definiującego stałą procesową na inne, obserwacyjnie równoważne. Ale w tym celu musimy udowodnić, że zmieniając wyrażenie definiujące stałą nie zmieniamy znaczenia tej stałej. Twierdzenie 53 poniżej jest analogiczne do twierdzenia 26 z rozdziału 4.

Definicja 52 *Niech E, F będą wyrażeniami, t że $\mathrm{fv}(E), \mathrm{fv}(F) \subseteq \widetilde{X}$. Mówimy, że E i F są obserwacyjnie równoważne, ozn. $E = F$, jeśli dla każdego zbioru procesów $\widetilde{P}$ $E\{\widetilde{P}/\widetilde{X}\} = F\{\widetilde{P}/\widetilde{X}\}$.*

Twierdzenie 53 *Niech $\mathrm{fv}(E), \mathrm{fv}(F) \subseteq \{X\}$. Jeśli*

$$\begin{aligned} \mathrm{A} &\stackrel{def}{=} E\{\mathrm{A}/X\} \\ \mathrm{B} &\stackrel{def}{=} F\{\mathrm{B}/X\} \\ E &= F \end{aligned}$$

to $\mathrm{A} = \mathrm{B}$.

Dowód: ... □