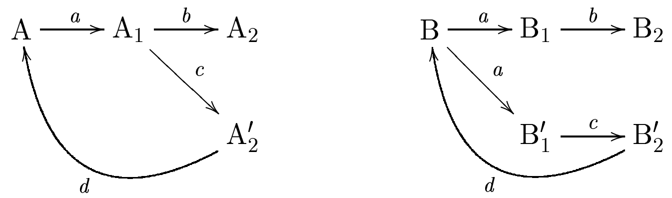
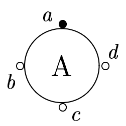
4 Silna równoważność bisymulacyjna

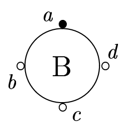
Ten rozdział poświęcony jest najważniejszemu pojęciu tego wykładu: pojęciu *bisymulacji*. Wprowadzimy tutaj równoważność procesów, zwaną *silną równoważnością bisymulacyjną*, ozn. $\sim$, opartą na tym właśnie pojęciu. Nie jest to jeszcze równość semantyczna $=$, której używaliśmy w poprzednim rozdziale; tę wprowadzimy w następnym rozdziale. Równoważność bisymulacyjna $\sim$ traktuje τ jak zwykłe zdarzenie, np. $a.\tau.0 \nsim a.0$. W związku z tym odróżnia ona więcej procesów niż $=$. Mimo to, większość równości z poprzedniego rozdziału jest prawdziwa już dla $\sim$, a przy tym jej definicja jest bardziej przejrzysta niż $=$.

Zacznijmy od prostego przykładu, pozwalającego wyrobić intuicję:

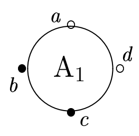


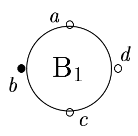
Jeśli na powyższe dwa systemy spojrzymy jak na automaty, to języki rozpoznawane przez nie są identyczne: $(acd)^*ab$, przy założeniu że wszystkie stany z indeksem 2 są akceptujące. Ale wyobraźmy sobie, że mamy możliwość eksperymentowania z tymi systemami. Początkowo, obydwa systemy są skłonne wykonać tylko a, jest to jedyny *aktywny* port:



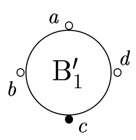


a wszystkie pozostałe porty są nieaktywne. Wykonajmy zdarzenie a w obydwu. W przypadku systemu A rezultat jest jednoznaczny (deterministyczny). W przypadku B mamy dwie możliwości, w każdej z nich inny jest zbiór aktywnych portów:





lub



Eksperyment odróżnia zatem A i B. Naszą intencją jest następująca definicja równoważności $\sim$:

$$P \sim Q \text{ gdy wtw. } \boxed{\begin{array}{l} \forall \alpha \in \mathrm{Act}, \\ (i)\ \ P \xrightarrow{\alpha} P' \implies \exists Q' \text{ t.że } Q \xrightarrow{\alpha} Q' \text{ i } P' \sim Q' \\ (ii)\ \ Q \xrightarrow{\alpha} Q' \implies \exists P' \text{ t.że } P \xrightarrow{\alpha} P' \text{ i } P' \sim Q' \end{array}} \qquad (20)$$

Czyli P i Q są równoważne wtw. gdy nie umiemy ich odróżnić w pojedynczym kroku eksperymentu oraz systemy które otrzymamy w rezultacie tego kroku są znów równoważne. Ponadto interesowałaby nas największa możliwie relacja $\sim$. Ale czy powyższe sformułowanie (20) jest poprawne? Zaraz się to wyjaśni.

4.1 Silna bisymulacja

Definicja 14 *Relację binarną R pomiędzy procesami nazywamy silną bisymulacją, jeśli dla każdej pary $(P, Q) \in R$, $\forall \alpha \in \mathrm{Act}$,*

$$(i)\ \ P \xrightarrow{\alpha} P' \implies \exists Q' \text{ t.że } Q \xrightarrow{\alpha} Q' \text{ i } (P', Q') \in R$$
$$(ii)\ \ Q \xrightarrow{\alpha} Q' \implies \exists P' \text{ t.że } P \xrightarrow{\alpha} P' \text{ i } (P', Q') \in R.$$

Używamy określenia *silna* bisymulacja dla odróżnienia od *słabej* bisymulacji, którą zdefiniujemy w następnym rozdziale. Zanim to jednak nastąpi, będziemy czasem pisać krótko *bisymulacja.*

Ćwiczenie 48 *Znajdź relację bisymulacji pomiędzy specyfikacją semafora ogólnego* $\mathrm{Sem}_n(0)$ *a jego implementacją* $\underbrace{\mathrm{Sem}|\ldots|\mathrm{Sem}}_{n \text{ razy}}$*, dla małych n:*

$$\mathrm{Sem}_n(0) \overset{def}{=} P.\mathrm{Sem}_n(1) \qquad\qquad \mathrm{Sem} \overset{def}{=} P.V.\mathrm{Sem}$$
$$\mathrm{Sem}_n(i) \overset{def}{=} P.\mathrm{Sem}_n(i{+}1) + V.\mathrm{Sem}_n(i{-}1) \quad dla \quad 1 \leq i \leq n{-}1$$
$$\mathrm{Sem}_n(n) \overset{def}{=} V.\mathrm{Sem}_n(n{-}1)$$

Fakt 15 *Jeśli R, R' oraz R_i, dla $i \in I$, są silnymi bisymulacjami, to*

$$(i)\ \ \textit{relacja identyczności} \ \equiv \qquad\qquad (iii)\ \ R' \circ R$$
$$(ii)\ \ R^{-1} \qquad\qquad (iv)\ \ \bigcup_{i \in I} R_i$$

są nimi też.

Definicja 16 *Procesy P i Q są silnie równoważne, ozn. $P \sim Q$, jeśli $(P,Q) \in R$, dla pewnej bisymulacji R.*

Innymi słowy, silna równoważność $\sim$ jest sumą wszystkich bisymulacji:

$$\sim \;=\; \bigcup_{R \text{ silna bisymulacja}} R$$

Relację $\sim$ będziemy nazywać też *silną równoważnością bisymulacyjną.*

Uwaga 17 *Mimo iż implicite rozważamy tu tylko graf tranzycyjny procesów z języka podstawowego, łatwo widać, że definicja bisymulacji, a zatem również silnej równoważności, ma sens dla dowolnego innego grafu tranzycyjnego.*

Fakt 18

(i) $\sim$ *jest największą silną bisymulacją*

(ii) $\sim$ *jest równoważnością*

Ćwiczenie 49 *Udowodnij fakty 15 i 18.*

Fakt 19 *Zachodzi równoważność (20).*

Dowód: Niech $\sim'$ oznacza relację t.że $P \sim' Q$ wtw. gdy procesy P i Q spełniają warunek ujęty w ramce w (20). Należy pokazać równość dwóch relacji: $\sim \;=\; \sim'$. Po pierwsze, mamy $\sim \;\subseteq\; \sim'$, ponieważ $\sim$ jest silną bisymulacją. Po wtóre, mamy również $\sim' \subseteq \;\sim$ ponieważ $\sim'$ jest również silną bisymulacją a $\sim$ jest największą silną bisymulacją. □

Ćwiczenie 50 *Pokaż, iż relacja $\sim'$ użyta w dowodzie faktu 19 jest rzeczywiście silną bisymulacją.*

Fakt 20 $\sim$ *jest największą relacją spełniającą (20).*

Dowód: Każda relacja R spełniająca (20) jest bisymulacją, a zatem $R \subseteq \;\sim$. □

Oczywiście $\sim$ nie jest jeszcze równoważnością semantyczną $=$ obiecywaną w poprzednich rozdziałach. Podstawową przyczyną jest fakt, iż traktuje ona zdarzenie τ tak jak wszystkie inne. W związku z tym bez wątpienia $\sim$ nie spełnia praw (τ_1) – (τ_3) z rozdziału 3, np.

$$\alpha.\tau.P \;\not\sim\; \alpha.P$$

Rozważamy najpierw $\sim$, zanim przejdziemy do $=$ z dwóch powodów. Po pierwsze, spełnia ona *wszystkie pozostałe* prawa z rozdziału 3. Zatem silna równoważność uwzględnia wszystkie aspekty semantyczne procesów z wyjątkiem zdarzenia nieobserwowalnego τ. Po drugie, $\sim$ jest prostsza, a $=$ definiuje się w dużym stopniu podobnie jak $\sim$.

Ćwiczenie 51 *Wybierz jedno z praw statycznych i jedno z praw dynamicznych i pokaż, że* $\sim$ *je spełnia. (Wskazówka: podobnie jak w dowodzie faktu 24.)*

Ćwiczenie 52 *Przez indukcję po n pokaż, że okrojona wersja prawa ekspansji zachodzi dla* $\sim$ *:*

$$\begin{aligned} P_1|\ldots|P_n \quad \sim \quad & \sum\{\ \alpha.(P_1|\ldots|P_i'|\ldots|P_n)\ :\ P_i \xrightarrow{\alpha} P_i'\ \}\ + \\ & \sum\{\ \tau.(P_1|\ldots|P_i'|\ldots|P_j'|\ldots|P_n)\ :\ P_i \xrightarrow{l} P_i', P_j \xrightarrow{\bar{l}} P_j', i<j\ \}. \end{aligned}$$

Ćwiczenie 53 *Relację R nazwijmy s-bisymulacją jeśli R jest symetryczna oraz dla każdej pary* $(P,Q) \in R$, $\forall \alpha \in \mathrm{Act}$,

$$P \xrightarrow{\alpha} P' \implies \exists Q' \ \ t.\dot{z}e\ \ Q \xrightarrow{\alpha} Q' \ \ i\ \ (P',Q') \in R.$$

Zaoszczędziliśmy polowę definicji bisymulacji. Czy każda s-bisymulacja jest bisymulacją? Czy każda bisymulacja jest s-bisymulacją. Czy równoważność bisymulacyjna pokrywa się z równoważnością s-bisymulacyjną, tzn. czy zachodzi:

$$\Big(\bigcup_{R \ \ silna\ bisymulacja} R \Big) \ = \ \Big(\bigcup_{R \ \ s\text{-}bisymulacja} R \Big)\ ?$$

4.2 Z dokładnością do $\sim$

Aby wykazać, iż para procesów jest silnie równoważne, wystarczy wskazać (jakąkolwiek) bisymulację zawierającą tę parę. Zatem pojęcie bisymulacji daje nam automatycznie metodę dowodzenia równoważności. Niestety, nie zawsze łatwo jest odgadnąć tę właściwą relację bisymulacji. Innym problemem jest rozmiar relacji. Na przykład Czytelnik, który rozwiązał ćwiczenie 48 zauważył zapewne, że wraz ze wzrostem n rozmiar bisymulacji rośnie gwałtownie. Poniżej przedstawiamy modyfikację definicji 14 pozwalającą ograniczyć w znacznym stopniu rozmiar relacji, a więc prowadzącą do bardziej efektywnej techniki dowodowej:

Definicja 21 *Relację binarną R pomiędzy procesami nazywamy* <u>*silną bisymulacją z dokładnością do* $\sim$</u>, *jeśli dla każdej pary* $(P,Q) \in R$, $\forall \alpha \in \mathrm{Act}$,

$$(i)\ \ P \xrightarrow{\alpha} P' \implies \exists Q' \ \ t.\dot{z}e\ \ Q \xrightarrow{\alpha} Q' \ \ i\ \ (P',Q') \in\ \sim\circ R \circ \sim$$

$$(ii)\ \ Q \xrightarrow{\alpha} Q' \implies \exists P' \ \ t.\dot{z}e\ \ P \xrightarrow{\alpha} P' \ \ i\ \ (P',Q') \in\ \sim\circ R \circ \sim$$

Jedyna różnica względem definicji 14 to osłabienie wymogu co do pary (P', Q'). Tutaj wystarczy, jeśli $(P', Q') \in \ \sim \circ R \circ \sim$, czyli dla pewnych P'', Q'', $P' \sim P''$, $(P'', Q'') \in R$ i $Q'' \sim Q'$. Możemy to przedstawić tak:

$$
\begin{tikzcd}
 & & P \arrow[dll, "\alpha"'] & R & Q \arrow[drr, "\alpha"] & & \\
P' & \sim & P'' & R & Q'' & \sim & Q'
\end{tikzcd}
$$

Ćwiczenie 54 *Znajdź jak najmniejszą bisymulację z dokładnością do* $\sim$ *dla pary procesów z ćwiczenia 48.*

We wniosku 23 poniżej pokażemy, iż za pomocą bisymulacji z dokładnością do $\sim$ możemy pokazać dokładnie to samo, co za pomocą bisymulacji, mianowicie silną równoważność procesów. Zatem obydwie metody dowodowe są sobie równoważne.

Lemat 22 *Jeśli R jest silną bisymulacją z dokładnością do* $\sim$ *, to* $\sim \circ R \circ \sim$ *jest silną bisymulacją.*

Dowód: Aby dowieść że $\sim \circ R \circ \sim$ jest silną bisymulacją, korzystamy (dwukrotnie) z faktu iż $\sim$ jest bisymulacją oraz z tego, że R jest bisymulacją z dokładnością do $\sim$:

$$
\begin{tikzcd}
 & & P \arrow[dll, "\alpha"'] & \sim & P_1 \arrow[dll, "\alpha"'] & R & Q_1 \arrow[drr, "\alpha"] & \sim & Q \arrow[drr, "\alpha"] & & \\
P' & \sim & P''' & \sim & P'' & R & Q'' & \sim & Q''' & \sim & Q'
\end{tikzcd}
$$

Ale $\sim \circ \sim \ \subseteq \ \sim$, więc $(P', Q') \in \ \sim \circ R \circ \sim$. □

Ćwiczenie 55 *Pokaż, że zachodzi również implikacja przeciwna: jeśli* $\sim \circ R \circ \sim$ *jest silną bisymulacją, to R jest silną bisymulacją z dokładnością do* $\sim$ *.*

Wniosek 23 *Jeśli R jest silną bisymulacją z dokładnością do* $\sim$ *, to* $R \subseteq \ \sim$ *.*

Dowód: Ponieważ $\equiv \ \subseteq \ \sim$, mamy $R = (\equiv \circ R \circ \equiv) \subseteq \ \sim \circ R \circ \sim$. A z poprzedniego faktu, $\sim \circ R \circ \sim \ \subseteq \ \sim$. □

4.3 Kongruencja

Silna równoważność jest kongruencją względem wszystkich operatorów.

Fakt 24 *Jeśli* $P \sim Q$*,* $P' \sim Q'$ *oraz* $P_i \sim Q_i$*, dla* $i \in I$*, to:*

$$(i)\ \ \alpha.P \ \sim\ \alpha.Q \qquad\qquad (iii)\ \ P\backslash L \ \sim\ Q\backslash L$$
$$(ii)\ \ \sum\nolimits_{i\in I} P_i \ \sim\ \sum\nolimits_{i\in I} Q_i \qquad\qquad (iv)\ \ P[f] \ \sim\ Q[f]$$
$$(v)\ \ P|P' \ \sim\ Q|Q'$$

Dowód: Punkty (i) i (ii) można pokazać bezpośrednio z (20). Aby udowodnić punkt (v) wystarczy zauważyć, iż relacja

$$\{(P|P', Q|Q') : P \sim Q, P' \sim Q'\}$$

jest silną bisymulacją.

Ćwiczenie 56 *Pokaż, że faktycznie tak jest.*

Punkty (iii) i (iv) podobnie do (v). □

Dzięki temu, że $\sim$ jest kongruencją, możemy swobodnie przekształcać wyrażenia procesowe zastępując podwyrażenie innym silnie mu równoważnym. Chcielibyśmy posiadać również podobną swobodę w odniesieniu do przekształcania wyrażeń definiujących stałe procesowe. Ale w tym celu musimy udowodnić, że zmieniając prawą stronę równania definiującego stałą nie zmieniamy znaczenia tej stałej; np. stałe określone przez poniższe dwie definicje powinny być silnie równoważne:

$$\mathrm{A} \stackrel{\mathrm{def}}{=} b.0 + a.(\mathrm{A}|c.0)$$
$$\mathrm{B} \stackrel{\mathrm{def}}{=} a.(c.0|\mathrm{B}) + 0 + b.0$$

Definicja 25 *Przez* $\mathrm{fv}(E)$ *oznaczamy zbiór wszystkich zmiennych występujących w* E*. Załóżmy, że* $\mathrm{fv}(E), \mathrm{fv}(F) \subseteq \widetilde{X}$*. Mówimy, że wyrażenia* E*,* F *są silnie równoważne, ozn.* $E \sim F$*, jeśli dla każdego zbioru procesów* $\widetilde{P}$ *(indeksowanego tym samym zbiorem co* $\widetilde{X}$*),* $E\{\widetilde{P}/\widetilde{X}\} \sim F\{\widetilde{P}/\widetilde{X}\}$*.*

Twierdzenie 26 *Niech* $\mathrm{fv}(E), \mathrm{fv}(F) \subseteq \{X\}$*. Jeśli*

$$\mathrm{A} \stackrel{def}{=} E\{\mathrm{A}/X\}$$
$$\mathrm{B} \stackrel{def}{=} F\{\mathrm{B}/X\}$$
$$E \sim F$$

to $\mathrm{A} \sim \mathrm{B}$.

Dowód: ... □

Fakt 24 (być może z wyjątkiem punktu (*ii*)) wynika ze znacznie ogólniejszego twierdzenia:

Twierdzenie 27 *Rozważmy dowolny język opisu procesów, zawierający pewną liczbę operatorów. Załóżmy, iż wszystkie operatory są zdefiniowane wyłącznie przy pomocy reguł następującej postaci:*

$$\frac{\{X_i \xrightarrow{\alpha} X'_i : i \in I\}}{\mathrm{op}(X_1, \ldots, X_n) \xrightarrow{\alpha} E}$$

gdzie n jest arnością operatora op, $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$, *zmienne* X_i, Y_i *są parami różne,* $\mathrm{fv}(E) \subseteq \{X_i : i \notin I\} \cup \{Y_i : i \in I\}$ *oraz żadna zmienna nie występuje więcej niż raz w* E. *Wtedy* $\sim$ *jest kongruencją względem wszystkich operatorów języka.*

Ćwiczenie 57 *Udowodnij twierdzenie 27.*

4.4 Jednoznaczność rozwiązań układów równań

Definicja 28 *Zmienna* X *jest* <u>*słabo strzeżona*</u> *w wyrażeniu* E *jeśli każde wystąpienie* X *w* E *jest wewnątrz pewnego podwyrażenia* $\alpha.E'$ *w* E.

Na przykład, X jest słabo strzeżona w $\tau.X$. Poniższe twierdzenie udowodnimy później:

Twierdzenie 29 (jednoznaczność rozwiązań względem $\sim$)

- *Jeśli* $\mathrm{A} \stackrel{def}{=} E\{\mathrm{A}/X\}$ *to* $\mathrm{A} \sim E\{\mathrm{A}/X\}$.
- *Rozważmy układ równań* $\mathrm{A}_i \stackrel{def}{=} E_i\{\widetilde{\mathrm{A}}/\widetilde{X}\}$, *indeksowany przez* $i \in I$. *Zakładamy iż zmienne pojawiające się w wyrażeniach* E_i *należą do zbioru* $\{X_j : j \in I\}$ *oraz że zmienna* X_i *jest słabo strzeżona w* E_j, *dla każdego* $i, j \in I$. *Jeśli* $\widetilde{P} \sim \widetilde{E}\{\widetilde{P}/\widetilde{X}\}$ *oraz* $\widetilde{Q} \sim \widetilde{E}\{\widetilde{Q}/\widetilde{X}\}$, *to* $\widetilde{P} \sim \widetilde{Q}$.

Jak widać, dla $\sim$ wystarczą słabsze założenia niż dla = w rozdziale 3.2.
Dowód: ... □

4.5 Największy punkt stały

Przypomnijmy sobie równoważność (20). W rzeczywistości napisane tam jest, iż $\sim$ jest największym punktem stałym pewnego przekształcenia. Oto szczegóły:

Definicja 30 *Niech $\mathcal{F}$ będzie przekształceniem w zbiorze relacji binarnych pomiędzy procesami. Dla takiej relacji R, niech relacja $\mathcal{F}(R)$ będzie określona następująco: $(P, Q) \in \mathcal{F}(R)$ wtw. gdy*

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall \alpha \in \mathrm{Act}, \\ (i) \;\; P \xrightarrow{\alpha} P' \;\; \Longrightarrow \exists Q' \;\; t.\dot{z}e \;\; Q \xrightarrow{\alpha} Q' \;\; i \;\; (P', Q') \in R \\ (ii) \;\; Q \xrightarrow{\alpha} Q' \;\; \Longrightarrow \exists P' \;\; t.\dot{z}e \;\; P \xrightarrow{\alpha} P' \;\; i \;\; (P', Q') \in R \end{array}}$$

Fakt 31

(*i*) $\mathcal{F}$ *jest monotoniczna.*

(*ii*) R *jest silną bisymulacją wtw. gdy* $R \subseteq \mathcal{F}(R)$.

Poniższe twierdzenie jest w istocie innym sformułowaniem faktów 19 oraz 20 a jego dowód jest również identyczny jak dowody wspomnianych faktów. Podstawowym pożytkiem z definicji 30 oraz twierdzenia 32 jest znacznie większa czytelność.

Twierdzenie 32 *Silna równoważność jest największym punktem stałym $\mathcal{F}$.*

Dowód: Wiemy, że $\sim$ jest silną bisymulacją, czyli

$$\sim \; \subseteq \mathcal{F}(\sim). \tag{21}$$

Ponieważ $\mathcal{F}$ jest monotoniczna, $\mathcal{F}(\sim) \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{F}(\sim))$, tzn. $\mathcal{F}(\sim)$ jest również bisymulacją. Ale $\sim$ jest przecież największą bisymulacją, zatem $\mathcal{F}(\sim) \subseteq \; \sim$. Czyli pokazaliśmy $\sim \; = \mathcal{F}(\sim)$.

Tak naprawdę to wcale nie musimy korzystać z (21). Albo możemy wykazać (21), ponieważ na podstawie definicji silnej równoważności wiemy, iż

$$\sim \; = \bigcup \{R : R \subseteq \mathcal{F}(R)\}. \tag{22}$$

W tym celu weźmy dowolną relację R ze zbioru powyżej, tzn. taką, że $R \subseteq \mathcal{F}(R)$ (czyli, inaczej mówiąc, dowolną bisymulację). Na podstawie (22) mamy $R \subseteq \; \sim$, zatem $\mathcal{F}(R) \subseteq \mathcal{F}(\sim)$. Wnioskujemy więc, że $R \subseteq \mathcal{F}(\sim)$. A ponieważ R była wybrana dowolnie, mamy $\bigcup \{R : R \subseteq \mathcal{F}(R)\} \subseteq \mathcal{F}(\sim)$, czyli $\sim \; \subseteq \mathcal{F}(\sim)$. □

Uważny Czytelnik z pewnością zauważył, że niepotrzebny był trud dowodzenia powyższego twierdzenia, ponieważ jest ono szczególnym przypadkiem sytuacji rozważanej w twierdzeniu Knastera-Tarskiego o punkcie stałym w kracie zupełnej. Co więcej, dowód twierdzenia 32 działa dla dowolnej kraty zupełnej, gdyż nie odwołujemy się w nim do żadnych specyficznych własności naszych relacji.

Twierdzenie 33 (Knaster-Tarski) *Każda funkcja monotoniczna $f : X \to X$ w kracie zupełnej $\langle X, \sqsubseteq \rangle$ posiada największy punkt stały, równy kresowi górnemu*

$$\bigsqcup \{x \in X : x \sqsubseteq f(x)\}.$$

Ćwiczenie 58 *Tak naprawdę to jest to twierdzenie* dualne *do twierdzenia Knastera-Tarskiego, mówiącego o najmniejszym punkcie stałym równym kresowi dolnemu zbioru $\{x \in X : f(x) \sqsubseteq x\}$. Uzasadnij, dlaczego obydwa twierdzenia są sobie równoważne.*

4.6 Indukcja a koindukcja

Metodę dowodzenia za pomocą bisymulacji nazywamy *koindukcją*. Czy jest ona faktycznie *dualna* do znanej nam dobrze indukcji? Tak! Spróbujmy to jakoś uzasadnić, wykorzystując dualność pomiędzy najmniejszym a największym punktem stałym. Zasada koindukcji jest następująca: aby pokazać równoważność dwóch procesów, znajdź bisymulację, która zawiera tę parę. Zatem zbiór par, o których możemy pokazać, że są równoważne, to największa relacja R taka, że

$$R \subseteq \mathcal{F}(R),$$

dla $\mathcal{F}$ z poprzedniego rozdziału.

Popatrzmy teraz na indukcję, na prostym przykładzie. Rozważmy relację równoważności skończonych list zawierających liczby naturalne, określoną następująco: dwie listy są równoważne, jeśli są równej długości a ich, pierwsze, drugie, ..., itd. elementy przystają modulo 7. Oczywiście, równoważności tej można dowieść indukcyjnie: listy są równoważne albo gdy obydwie są puste albo gdy obydwie są niepuste, ich głowy przystają modulo 7 oraz ich ogony są równoważne. Relacja ta jest *najmniejszym* punktem stałym pewnego operatora $\mathcal{G}$ określonego jak następuje. Dla relacji binarnej R zawierającej pary list,

- $\mathcal{G}(R)$ zawiera zawsze parę list pustych, $(\textsc{nil}, \textsc{nil}) \in \mathcal{G}(R)$, niezależne od R;
- jeśli R zawiera parę list postaci (x, y) oraz n i m przystają modulo 7, to $(\textsc{cons}(n, x), \textsc{cons}(m, y)) \in \mathcal{G}(R)$.

Czyli

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(R) \;=\;\; & \{(\textsc{nil}, \textsc{nil})\} \cup \\ & \{(\textsc{cons}(n,x), \textsc{cons}(m,y)) : (x,y) \in R \;\text{ oraz } n \text{ i } m \text{ przystają modulo } 7\}.\end{aligned}$$

Relacja równoważności, którą rozważamy, to najmniejsza R taka, że

$$\mathcal{G}(R) \subseteq R.$$

Dla lepszego porównania indukcji i koindukcji, rozważmy listy nieskończone oraz zaadaptujmy rozważaną relację równoważności. Teraz rozumowanie indukcyjne zawodzi, ale można dowieść naszej równoważności koindukcyjnie. Okazuje się, że teraz nasza relacja równoważności to największy punkt stały pewnego operatora $\mathcal{F}$; lub innymi słowy, największa R taka, że

$$R \subseteq \mathcal{F}(R).$$

Operator $\mathcal{F}$ definiujemy teraz podobnie do $\mathcal{G}$:

$$\mathcal{F}(R) \;=\; \{(\textsc{cons}(n,x), \textsc{cons}(m,y)) : (x,y) \in R \;\text{ oraz } n \text{ i } m \text{ przystają modulo } 7\}.$$

Ćwiczenie 59 *Rozważ zbiór wszystkich list skończonych i nieskończonych. Zdefiniuj operator $\mathcal{F}$ taki, że równoważność list jest jego największym punktem stałym.*