Przykładowe rozwiązania zadań z kolokwium (WTM), 25 listopada 2004

Zad. 1. (grupa B)
Funkcja ϕ przypisuje parze funkcji z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{N}$ zbiór tych elementów ich dziedziny, na których te funkcje przyjmują różne wartości.

a) ϕ nie jest 1-1. Niech $c_i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, dla $i \in \mathbb{N}$, oznacza funkcję stałą określoną przez $c_i(n) = i$, dla $n \in \mathbb{N}$. Mamy

$$\phi(c_0, c_1) = \phi(c_2, c_3) = \mathbb{N},$$

więc ϕ nie jest 1-1.

Pokażemy, że ϕ jest na. Niech $X \subseteq \mathbb{N}$ będzie dowolnym elementem przeciwdziedziny. Zdefiniujemy funkcje $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takie, że $\phi(f, g) = X$. Niech f będzie funcja charakterystyczną zbioru X:

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } n \in X \\ 0, & \text{gdy } n \notin X \end{cases}$$

i niech $g = c_0$.

b) Zbiór $\overrightarrow{\phi}^{-1}(\{\mathbb{N}_0\})$ jest nieskończony. Aby to udowodnić, zdefiniujemy nieskończony ciąg funkcji $f_i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taki, że dla każdego $i \in \mathbb{N}$, $\phi(f_i, f_0) = \mathbb{N}_0$ oraz taki, że funkcje f_i sa parami różne.

$$f_i(n) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } n = 0 \\ i, & \text{gdy } n \neq 0 \end{cases}$$

(w szczególności, $f_0 = c_0$).

c) Zbiór $\overrightarrow{\phi}(\{\langle f_i, g_i\rangle : i \in \mathbb{N}\})$ jest skończony i równy $\{\mathbb{N}\}$, ponieważ dla każdego i oraz n mamy $f_i(n) \neq g_i(n)$.

Zbiór $Z = \overrightarrow{\phi}(\{\langle f_i, g_j\rangle : i, j \in \mathbb{N}\})$ jest nieskończony. Aby to udowodnić pokażę, że dla dowolnych $i, j \in \mathbb{N}$, takich że $i \leq j$, zbiór $z_{ij} = \{n \in \mathbb{N} : n \leq i \text{ lub } n > j\} \in Z$. Faktycznie, $z_{ij} = \{n \in \mathbb{N} : (f_i(n) = 0 \text{ i } g_j(n) = 1) \text{ lub } (f_i(n) = 1 \text{ i } g_j(n) = 0\} = \phi(f_i, g_j)$, dla $i \leq j$, więc $z_{ij} \in Z$.

Zad. 2. (grupa A)
Para $\langle x, y\rangle$ jest w relacji r_n jeśli albo obydwie liczby dzielą sie przez p^n, albo żadna.

a) Para $\langle x, y\rangle$ jest w relacji $R = \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} r_n$ jeśli w rozkładzie obydwu liczb x i y na czynniki pierwsze, liczba p występuje w takiej samej potędze.

Pokażemy, że R ma nieskończenie wiele klas abstakcji. Faktycznie, dla dowolnych $m > n \neq 0$, para $\langle p^m, p^n\rangle \notin R$, ponieważ $\langle p^m, p^n\rangle \notin r_m$. Więc każda z liczb p^n należy do innej klasy abstrakcji.

Pokażemy, że R na nieskończoną klasę abstrakcji. Niech q bedzie dowolną liczbą pierwszą, $q \neq p$, $q \geq 2$. Dla dowolnych $m, n > 0$, para $\langle q^m, q^n\rangle \in R$. Czyli klasa abstrakcji liczby q jest nieskończona.

b) Relacja $\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} r_n$ jest relacją pełną, tzn. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} r_n = (\mathbb{N}\setminus\{0,1\})^2$. Dla dowolnych $x, y \geq 2$, istnieje $n \in \mathbb{N}_0$ t., że $p^n \nmid x$ i jednocześnie $p_n \nmid y$ (n musi być po prostu wystarczająco duże), czyli $\langle x, y\rangle \in r_n$.

Stąd, oczywiście $\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} r_n$ jest relacją równoważności nie posiadającą skończonych klas abstrakcji.

Zad. 2. (grupa B)

a) Para $\langle x, y\rangle$ jest w relacji $R = \bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} r_n$ wtw, gdy $w(x) = w(y)$, ponieważ dla każdego $n \geq \max(w(x), w(y))$, mamy $\langle x, y\rangle \in r_n$ wtw, gdy $w(x) = w(y)$.

Pokażemy, że R ma nieskończenie wiele klas abstakcji. Faktycznie, dla dowolnych $m > n \neq 0$, para $\langle p^m, p^n\rangle \notin R$, ponieważ $w(p^m) \neq w(p^n)$. Więc każda z liczb p^n należy do innej klasy abstrakcji.

Pokażemy, że R na nieskończoną klasę abstrakcji. Niech q bedzie dowolną liczbą pierwszą, $q \neq p$, $q \geq 2$. Dla dowolnych $m, n > 0$, $w(q^m) = w(q^n) = 0$, więc para $\langle q^m, q^n\rangle \in R$. Czyli klasa abstrakcji liczby q jest nieskończona.

b) Relacje r_n stanowią łańcuch: jeśli $m \leq n$, to $r_n \subseteq r_m$. Stąd

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} r_n \;=\; r_0.$$

A więc $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} r_n$ jest relacją równoważności. Para $\langle x, y\rangle \in r_0$ wtw, gdy albo obydwie x i y nie dzielą się przez p, albo obydwie dzielą się przez p. Zatem r_0 ma dwie klasy abstrakcji, obydwie nieskończone:

$$\{n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\} : p|n\}, \qquad \{n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\} : p\nmid n\}.$$

Zad. 3. (grupa A i B)

a) Nie. Wskażemy bijekcję $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taką, że zbiór $\{f^n(7) : n \in \mathbb{N}\}$ jest nieskończony. (Oczywiście, liczba 7 może być tutaj zastąpiona przez dowolną inną liczbę naturalną.) Niech $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ będzie dowolną bijekcją ze zbioru liczb naturalnych do zbioru $\mathbb{Z}$ liczb całkowitych. Definiujemy f następująco, dla $x \in \mathbb{N}$:

$$f(x) = g^{-1}(g(x) + 1).$$

Inaczej mowiąc, f jest złożeniem trzech funkcji: $f = g^{-1}sg$, gdzie $s : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ jest funkcją dającą następnik, $s(z) = z + 1$. Mamy: $f^0(7) = 7$, $f^1(7) = g^{-1}(g(7) + 1)$, $f^2(7) = f(g^{-1}(g(7) + 1)) = g^{-1}(g(g^{-1}(g(7) + 1)) + 1) = g^{-1}(g(7) + 2)$, itd. Czyli

$$\{f^n(7) : n \in \mathbb{N}\} = \{g^{-1}(g(7) + n) : n \in \mathbb{N}\} = \overrightarrow{g}^{-1}(\{g(7) + n : n \in \mathbb{N}\})$$

Ponieważ g jest na, przeciwobraz zbioru nieskończonego jest nieskończony.

b) Nie. Wskażemy funkcję $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taką, że dla każdego $a \in \mathbb{N}$ zbiór $\{f^n(a) : n \in \mathbb{N}\}$ jest skończony, a zarazem f nie jest bijekcją. Niech

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{gdy } x \text{ parzyste} \\ x+1, & \text{gdy } x \text{ nieparzyste} \end{cases}$$

Faktycznie: gdy a jest parzyste, rozważany zbiór zawiera dokładnie jeden element; gdy a jest nieparzyste – dwa.

Zad. dodatkowe

Niech $\mathcal{Z} = \{Z \subseteq A : Z \subseteq \overrightarrow{f}(Z)\}$. Niech $Z_0 = \bigcup \mathcal{Z}$. Pokażemy, że zbiór Z_0 spełnia żądany warunek, czyli $Z_0 \subseteq \overrightarrow{f}(Z_0)$. Mamy

$$Z_0 = \bigcup \mathcal{Z} = \bigcup \{Z \subseteq A : Z \subseteq \overrightarrow{f}(Z)\}$$

Zauważmy, że zachodzi inkluzja

$$\bigcup \{Z \subseteq A : Z \subseteq \overrightarrow{f}(Z)\} \subseteq \bigcup \{\overrightarrow{f}(Z) : Z \subseteq A, Z \subseteq \overrightarrow{f}(Z)\}$$

ponieważ każdy zbiór należący do rodziny po lewej stronie jest zawarty w pewnym zbiorze należącym do rodziny po prawej stronie. Wreszcie zachodzi równość:

$$\bigcup \{\overrightarrow{f}(Z) : Z \subseteq A, Z \subseteq \overrightarrow{f}(Z)\} = \overrightarrow{f}(\bigcup \{Z \subseteq A : Z \subseteq \overrightarrow{f}(Z)\})$$

(obraz sumy jest równy sumie obrazów). Zbiór po prawej stronie to $\overrightarrow{f}(Z_0)$, więc pokazaliśmy, że $Z_0 \subseteq \overrightarrow{f}(Z_0)$.

Teraz łatwo udowodnic, że Z_0 jest największym takim zbiorem. Niech $Z \subseteq A$ będzie dowolnym zbiorem t.że $Z \subseteq \overrightarrow{f}(Z)$. Wtedy $Z \in \mathcal{Z}$, wiec $Z \subseteq \bigcup \mathcal{Z} = Z_0$.

Na koniec pokażemy, że $Z_0 = \overrightarrow{f}(Z_0)$. Wiemy, że $Z_0 \subseteq \overrightarrow{f}(Z_0)$. Stąd mamy

$$\overrightarrow{f}(Z_0) \subseteq \overrightarrow{f}(\overrightarrow{f}(Z_0)).$$

Czyli $\overrightarrow{f}(Z_0) \in \mathcal{Z}$. Skoro Z_0 jest sumą rodziny $\mathcal{Z}$, to $\overrightarrow{f}(Z_0) \subseteq Z_0$. Więc zachodzi równość.