Kolokwium (WTM), 13 stycznia 2005

GRUPA B

Każde zadanie rozwiązujemy na osobnej kartce!
Każdą kartkę proszę podpisać oraz napisać grupę (A lub B) i nazwisko prowadzącego ćw.

Zad. 1. (7 pkt) Niech $\mathbb{R}$ oznacza zbiór liczb rzeczywistych. Dla $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ powiemy, że $x \in R$ jest *miejscem zerowym* funkcji f, o ile $f(x) = 0$. W przeciwnym przypadku x nazywamy *miejscem niezerowym* funkcji f.

Oblicz moc zbioru wszystkich funkcji $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ takich, że w każdym niepustym przedziale otwartym jest:

a) co najwyżej skończenie wiele miejsc niezerowych;

b) przynajmniej jedno miejsce zerowe;

c) co najwyżej przeliczalnie wiele miejsc niezerowych.

Należy rozważyć osobno każdy z powyższych warunków.

Zad. 2. (7 pkt) Niech $\mathtt{Pa}\subseteq\mathbb{N}$ oznacza zbiór liczb parzystych a $\mathtt{NPa}\subseteq\mathbb{N}$ zbiór liczb nieparzystych. Określmy relację porządku częściowego $\sqsubseteq$ w $P(\mathbb{N})$ następująco: dla $A, B\subseteq\mathbb{N}$,

$$A\sqsubseteq B \quad \text{wtw gdy} \quad B \cap \mathtt{Pa} \subseteq A \cap \mathtt{Pa} \quad \text{i} \quad A \cap \mathtt{NPa} \subseteq B \cap \mathtt{NPa}.$$

a) Czy $\langle P(\mathbb{N}), \sqsubseteq\rangle$ ma element największy i najmniejszy? Jeśli tak, to wskaż je.

b) Czy $\langle P(\mathbb{N}), \sqsubseteq\rangle$ jest kratą zupełną?

c) Czy $\langle P(\mathbb{N}), \sqsubseteq\rangle$ jest porządkiem liniowym?

d) Czy $\langle P(\mathbb{N}), \sqsubseteq\rangle$ jest izomorficzny z $\langle P(\mathbb{N}), \subseteq\rangle$?

Zad. 3. (6 pkt) Rozważmy porządek leksykograficzny $\langle\mathbb{Z}^*, \preccurlyeq\rangle$ wyznaczony przez naturalny porządek w zbiorze liczb całkowitych $\mathbb{Z}$. Zbiór $X\subseteq\mathbb{Z}^*$ nazywamy *pięknym*, jeśli X ma kres dolny i górny. Oblicz moc zbioru wszystkich pięknych podzbiorów zbioru $\mathbb{Z}^*$.