Kolokwium (WTM), 13 stycznia 2005

GRUPA A

Każde zadanie rozwiązujemy na osobnej kartce!
Każdą kartkę proszę podpisać oraz napisać grupę (A lub B) i nazwisko prowadzącego ćw.

Zad. 1. (7 pkt) Niech $\mathbb{R}$ oznacza zbiór liczb rzeczywistych. Dla $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ powiemy, że $x \in R$ jest *miejscem zerowym* funkcji f, o ile $f(x) = 0$. W przeciwnym przypadku x nazywamy *miejscem niezerowym* funkcji f.

Oblicz moc zbioru wszystkich funkcji $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ takich, że w każdym niepustym przedziale otwartym jest:

a) przynajmniej jedno miejsce zerowe;

b) co najwyżej przeliczalnie wiele miejsc niezerowych;

c) co najwyżej skończenie wiele miejsc niezerowych.

Należy rozważyć osobno każdy z powyższych warunków.

Zad. 2. (7 pkt) Niech $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{N}$ oznacza zbiór liczb pierwszych. Określmy relację porządku częściowego $\sqsubseteq$ w $P(\mathbb{N})$ następująco: dla $A, B \subseteq \mathbb{N}$,

$$A \sqsubseteq B \quad \text{wtw gdy} \quad A \cap \mathcal{X} \subseteq B \cap \mathcal{X} \quad \text{i} \quad B \cap (\mathbb{N} \setminus \mathcal{X}) \subseteq A \cap (\mathbb{N} \setminus \mathcal{X}).$$

a) Czy $\langle P(\mathbb{N}), \sqsubseteq \rangle$ ma element największy i najmniejszy? Jeśli tak, to wskaż je.

b) Czy $\langle P(\mathbb{N}), \sqsubseteq \rangle$ jest kratą zupełną?

c) Czy $\langle P(\mathbb{N}), \sqsubseteq \rangle$ jest porządkiem liniowym?

d) Czy $\langle P(\mathbb{N}), \sqsubseteq \rangle$ jest izomorficzny z $\langle P(\mathbb{N}), \subseteq \rangle$?

Zad. 3. (6 pkt) Rozważmy porządek leksykograficzny $\langle \mathbb{N}^*, \preccurlyeq \rangle$ wyznaczony przez naturalny porządek w $\mathbb{N}$. Zbiór $X \subseteq \mathbb{N}^*$ nazywamy *złym*, jeśli X ma kres dolny i górny. Oblicz moc zbioru wszystkich złych podzbiorów zbioru $\mathbb{N}^*$.