Kolokwium (WTM), 25 listopada 2004

GRUPA A

Każde zadanie rozwiązujemy na osobnej kartce!
Każdą kartkę proszę podpisać oraz napisać grupę (A lub B) i nazwisko prowadzącego ćw.

Zad. 1. (7 pkt) Niech $\phi : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to P(\mathbb{N})$ będzie zdefiniowana następująco:

$$\phi(f,g) = \{n \in \mathbb{N} : f(n) = g(n)\}.$$

a) Czy funkcja ϕ jest różnowartościowa? Czy jest na $P(\mathbb{N})$?

b) Niech $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Czy zbiór $\overrightarrow{\phi}^{-1}(\{\mathbb{N}_0\})$ jest skończony?

c) Dla $i \in \mathbb{N}$, zdefiniujmy funkcje $f_i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ oraz $g_i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ następująco:

$$f_i(n) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } n < i \\ 1, & \text{gdy } n \geq i \end{cases} \qquad g_i(n) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } n < i \\ 0, & \text{gdy } n \geq i \end{cases}$$

Który z poniższych dwóch zbiorów jest skończony:

$$\overrightarrow{\phi}(\{\langle f_i, g_i\rangle : i \in \mathbb{N}\}), \qquad \overrightarrow{\phi}(\{\langle f_i, g_j\rangle : i, j \in \mathbb{N}\})?$$

Zad. 2. (7 pkt) Niech $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Niech p będzie liczbą pierwszą, $p \geq 2$. Definiujemy rodzinę $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ relacji równoważności w zbiorze $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ następująco:

$$\langle x, y\rangle \in r_n \quad \text{wtw, gdy} \quad (p^n | x \quad \text{wtw, gdy} \quad p^n | y).$$

a) Czy relacja $\bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} r_n$ ma nieskończenie wiele klas abstrakcji? Czy ma ona nieskończoną klasę abstakcji?

b) Czy $\bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} r_n$ jest relacją równoważności? Jeśli tak, to czy ma skończoną klasę abstrakcji?

Zad. 3. (6 pkt) Niech $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ będzie dowolną funkcją.

a) Czy jeśli f jest bijekcją, to dla każdego $a \in \mathbb{N}$ zbiór $\{f^n(a) : n \in \mathbb{N}\}$ jest skończony?

b) Czy zachodzi implikacja w przeciwną strone?

Dla przypomnienia: $f^0(a) = a,\ f^{n+1}(a) = f(f^n(a))$.

Zad. dodatkowe (6 pkt) Niech A będzie dowolnym zbiorem i niech $f : A \to A$. Pokaż, że istnieje największy podzbiór Z zbioru A spełniający:

$$Z \subseteq \overrightarrow{f}(Z),$$

tzn. zbiór $Z_0 \subseteq A$ taki, że $Z_0 \subseteq \overrightarrow{f}(Z_0)$ oraz dla każdego $Z' \subseteq A$, jeśli $Z' \subseteq \overrightarrow{f}(Z')$ to $Z' \subseteq Z_0$. Czy $Z_0 = \overrightarrow{f}(Z_0)$?