Wstęp do teorii mnogości, egzamin poprawkowy, 4 marca 2005

GRUPA A

Każde zadanie rozwiązujemy na osobnej kartce!
Każdą kartkę proszę podpisać *czytelnie* oraz podać nr zadania i grupę.

Zad. 1. (20 pkt.) Niech $\mathbb{N}$ oznacza zbiór wszystkich liczb naturalnych. Zdefiniujmy relację $\preccurlyeq\ \subseteq P(\mathbb{N})^{\mathbb{N}}\times P(\mathbb{N})^{\mathbb{N}}$ następująco: dla $a, b \in P(\mathbb{N})^{\mathbb{N}}$, $a \preccurlyeq b$ wtw. gdy

- $a=b$ lub
- $a\neq b$ i $a(m)\subseteq b(m)$, gdzie $m = \min\{i \in \mathbb{N} : a(i) \neq b(i)\}$.

a) Pokaż, że $\preccurlyeq$ jest porządkiem częściowym w $P(\mathbb{N})^{\mathbb{N}}$.

b) Czy $\langle P(\mathbb{N})^{\mathbb{N}}, \preccurlyeq\rangle$ jest liniowy?

c) Czy $\langle P(\mathbb{N})^{\mathbb{N}}, \preccurlyeq\rangle$ jest dobrze ufundowany?

Zad. 2. (20 pkt.) Powiemy, że funkcja $f \in B^A$ jest *szczodra*, jeśli dla każdego nieprzeliczalnego $X \subseteq A$, zbiór $\vec{f}(X)$ jest nieprzeliczalny. Niech $\mathbb{R}$ oznacza zbiór liczb rzeczywistych.

a) Czy każda funkcja z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$, która jest *na* $\mathbb{R}$, jest szczodra?

a) Jaka jest moc zbioru wszystkich funkcji szczodrych z $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$?

b) Jaka jest moc zbioru wszystkich funkcji z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, które nie są szczodre?

Zad. 3. (20 pkt.) Niech $A \subseteq \mathbb{R}$ będzie dowolnym podzbiorem liczb rzeczywistych. Zdefiniujmy relację $\sim_A \subseteq P(\mathbb{R})\times P(\mathbb{R})$ następująco:

$$X \sim_A Y \quad \text{wtw. gdy} \quad X \cup A = Y \cup A.$$

a) Udowodnij, że $\sim_A$ jest relacją równoważności.

b) Udowodnij, że $P(A)$ jest równoliczny z $[\mathbb{R}]_{\sim_A}$.

c) Udowodnij, że $P(\mathbb{R}\setminus A)$ jest równoliczny ze zbiorem ilorazowym $P(\mathbb{R})/\sim_A$.

Zad. dodatkowe (10 pkt.) Czy $\langle P(\mathbb{N})^{\mathbb{N}}, \preccurlyeq\rangle$ z zad. 1 jest kratą zupełną?