Kolokwium (WTM), 8 stycznia 2004 - SZKIC ROZWIĄZAŃ DLA GRUPY A

**Zad. 1.** Nawet moc zbioru $B$ wszystkich bijekcji z $\mathbb{R}$ w $\mathbb{R}$ wynosi $2^{\mathfrak{c}}$. Wystarczy wskazać funkcję różnowartościową $f$ z $P(\mathbb{R}^+)$ w $B$. Dla $A \subseteq \mathbb{R}^+$, niech

$$f(A)(x) = \begin{cases} -x, & \text{gdy } x \in A \text{ lub } -x \in A \\ x, & \text{wpp.} \end{cases}$$

**Zad. 2.** Definiujemy trzy relacje częściowego porządku w $\mathbb{N}$.

$n \sqsubseteq_1 m$ wtw. gdy $m \leq n$

$n \sqsubseteq_2 m$ wtw. gdy

$n, m$ parzyste i $m \leq n$ lub

$n, m$ nieparzyste i $n \leq m$ lub

$n$ parzyste i $m$ nieparzyste

$n \sqsubseteq_3 m$ wtw. gdy

$n, m$ parzyste i $m \leq n$ lub

$n, m$ nieparzyste i $m \leq n$ lub

$n$ parzyste i $m$ nieparzyste

Dowód nieizomorficzności:

1 vs. 2: $\sqsubseteq_1$ ma elt największy a $\sqsubseteq_2$ nie

2 vs. 3: $\sqsubseteq_3$ ma elt największy a $\sqsubseteq_2$ nie

1 vs. 3: $\sqsubseteq_3$ ma elt o nieskończenie wielu ograniczeniach górnych, a $\sqsubseteq_1$ nie

Różnowartościowe funkcje monotoniczne:

$1 \to 2$, $1 \to 3$: $f(n) = 2 * n$

$2 \to 1$, $2 \to 3$: nie istnieje, bo $\sqsubseteq_2$ ma nieskończony łańcuch wstępujący (ciąg ściśle rosnący) a $\sqsubseteq_1$ i $\sqsubseteq_3$ nie

$3 \to 1$, $3 \to 2$: nie istnieje, bo $\sqsubseteq_3$ ma nieskończony łańcuch zstępujący (ciąg ściśle malejący) ograniczony z dołu, a $\sqsubseteq_1$ i $\sqsubseteq_2$ nie.

**Zad. 3.**

**a)** TAK, np. zbiór $X = X_D \cup X_G$, gdzie $X_D = \{0^n 1 : n \in \mathbb{N}\}, X_G = \{1^n : n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}\}$. Wszystkie elementy zbioru $D = \{0^n : n \in \mathbb{N}\}$ są ograniczeniami dolnymi zbioru $X_D$, a zatem zbioru $X$. Wszystkie elementy zbioru $G = \{1^n 2 : n \in \mathbb{N}\}$ są ograniczeniami górnymi zbioru $X_G$, a zatem zbioru $X$.

Każde ograniczenie dolne $w$ zbioru $X_D$ może zawierać tylko literę $0$ – wpp. nie byłoby mniejsze niż $0^{|w|}1 \in X_D$. Czyli $w \in D$. A zbiór $D$ nie ma eltu największego. Zatem $X$ nie ma kresu dolnego.

Wszystkie ograniczenia górne zbioru $X_G$ są postaci $1^n 2w$, gdzie $n \in \mathbb{N}, w \in \{0,1,2\}^*$ dowolne. A zbiór wszystkich słów tej postaci nie ma eltu najmniejszego, bo dla dowolnego słowa $1^n 2w$, słowo $1^{n+1}2$ jest mniejsze. Zatem $X$ nie ma kresu górnego.

**b)** $\preccurlyeq$ jest w rzeczywistości porządkiem prefiksowym. Odpowiedź brzmi NIE.

Łatwo pokazać, że każdy niepusty podzbiór $X \subseteq \{0,1,2\}^*$ ma kres dolny. Niech

$Y = \{n \in \mathbb{N} :$ wszystkie słowa w $X$ są dlugości co najmniej $n$ i ich prefiksy długości $n$ są identyczne $\}$.

Zbiór $Y$ jest skończony, więc posiada elt największy $n_0$. Prefiks wszystkich slów z $X$ długości $n_0$ jest ograniczeniem dolnym zbioru $X$. Jest największym takim ograniczeniem, bo żadne słowo dłuższe niż $n_0$ nie jest prefiksem wszystkim eltów zbioru $X$.

Z drugiej strony zbiór pusty posiada kres górny (słowo puste $\varepsilon$).