Zadanie:
Wskazać zbiory $A \subseteq B$ oraz funkcję $f : A \to A$ taką że

$$\vec{f}^4(B) \neq \vec{f}^5(B) = \vec{f}^6(B) \text{ oraz } \vec{f^{-4}}(B) \neq \vec{f^{-5}}(B) = \vec{f^{-6}}(B) \tag{1}$$

Czy może dodatkowo zachodzić warunek $\vec{f^{-6}}(B) = \vec{f}^6(B)$?

Rozwiązanie:
Niech $A = \{1, \ldots, 11\}$, a $f : A \to A$ jest określona tak:

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & x > 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

Niech $B = \{1, \ldots, 6\}$. Łatwo zauważyć, że:

$$\begin{aligned}
\vec{f}^1(B) &= \{1,2,3,4,5\} & \vec{f^{-1}}(B) &= \{1,\ldots,7\} \\
\vec{f}^2(B) &= \{1,2,3,4\} & \vec{f^{-2}}(B) &= \{1,\ldots,8\} \\
\vec{f}^3(B) &= \{1,2,3\} & \vec{f^{-3}}(B) &= \{1,\ldots,9\} \\
\vec{f}^4(B) &= \{1,2\} & \vec{f^{-4}}(B) &= \{1,\ldots,10\} \\
\vec{f}^5(B) &= \{1\} & \vec{f^{-5}}(B) &= \{1,\ldots,11\} \\
\vec{f}^6(B) &= \{1\} & \vec{f^{-6}}(B) &= \{1,\ldots,11\}
\end{aligned}$$

Twierdzimy, że warunek $\vec{f^{-6}}(B) = \vec{f}^6(B)$ nie może zachodzić dla żadnej funkcji f i żadnych zbiorów $B \subseteq A$, które spełniają warunek (1). Oznaczmy przez C zbiór $\vec{f^{-6}}(B) = \vec{f}^6(B)$. Na mocy założenia $\vec{f}^6(B) = \vec{f}^5(B)$ zachodzi $\vec{f}(C) = C$, zaś na mocy założenia $\vec{f^{-5}}(B) = \vec{f^{-6}}(B)$ zachodzi $\vec{f^{-1}}(C) = C$. W szczególności dla każdego całkowitego a zachodzi $\vec{f^a}(C) = C$.

Ponieważ dla każdej funkcji $g : Y \to Z$ i każdego $X \subseteq Z$ zachodzi

$$\vec{g}(\vec{g^{-1}}(X)) \subseteq X$$

równośc $\vec{f^{-6}}(B) = C$ implikuje, że $\vec{f}^6(C) \subseteq B$. Jednocześnie dla każdej funkcji $g : Y \to Z$ i dla każdego $X \subseteq Y$ zachodzi

$$X \subseteq \vec{g^{-1}}(\vec{g}(X))$$

a więc $B \subseteq \vec{f^{-6}}(\vec{f}^6(B)) = C$. Tak więc $C = B$. Ale to stoi w sprzeczności z założeniem, że $\vec{f}^4(B) \neq \vec{f}^5(B)$, ponieważ

$$\vec{f}^4(B) = \vec{f}^4(C) = C = \vec{f}^5(C) = \vec{f}^5(B)$$