Zad. 2. Niech C będzie zbiorem. Zdefiniujmy funkcję $f : P(P(C)) \to P(C)$ oraz relację równoważności R w zbiorze $P(P(C))$ następującymi wzorami, dla $A, B \subseteq P(C)$:

$$f(A) = \begin{cases} \bigcap\{C\setminus X : X \in A\}, & \text{gdy } A \neq \emptyset \\ C, & \text{gdy } A = \emptyset \end{cases} \qquad \langle A, B\rangle \in R \text{ wtw. gdy } f(A) = f(B).$$

a) Niech $C = \mathbb{N}$.

(i) Czy f jest różnowartościowa? Czy f jest na?

(ii) Ile elementów ma zbiór $\vec{f}^{-1}(\{C\})$?

(iii) Wskaż nieskończenie wiele nieskończonych klas abstrakcji relacji R.

b) Ile różnych klas abstrakcji ma relacja R, gdy $|C| = 75$?

Rozwiązanie: Zauważmy, że

$$f(A) = C\setminus \cup A$$

a) (i) Funkcja f jest na $P(\mathbb{N})$, bo gdy $X \subseteq \mathbb{N}$, to $X = f(\{\mathbb{N}\setminus X\})$. Funkcja ta nie jest $1-1$, bo np. $f(\emptyset) = \mathbb{N} = f(\{\emptyset\})$.

(ii) Zbiór $\vec{f}^{-1}(\{\mathbb{N}\})$ ma dwa elementy j.w. Dlatego, że $f(A) = \mathbb{N}$ wtw. gdy $\cup A = \emptyset$, a to ostatnie zachodzi tylko dla $A = \emptyset$ lub $A = \{\emptyset\}$.

(iii) Elementami tej samej klasy abstrakcji są zbiory, które mają te same sumy.

Żeby wskazać nieskończenie wiele klas abstrakcji R przy założeniu, że C jest zbiorem liczb naturalnych, trzeba wskazać nieskończenie wiele różnych podzbiorów N. Aby każda taka klasa była nieskończona wystarczy, że podzbiór jej odpowiadający jest nieskończony. Niech $Parz$ będzie zbiorem liczb naturalnych parzystych a $NParz$ nieparzystych. Poniżej, podany jest przykład przeliczalnie wielu zbiorów, którym odpowiadają rozłączne klasy abstrakcji, i przeliczalnie wielu elementów w każdej z tych klas (e_i^j jest j-tym elementem klasy i).

$$\begin{aligned} Zbior_i &= Parz \cup \{x \in NParz \mid x \leq 2i\} \\ Klasa_i &= \{A \in P(P(N)) \mid \cup A = Zbior_i\} \\ elem_i^j &= \{NParz \cap Zbior_i, \{x \in Parz \mid x \leq 2j\}, \{x \in Parz \mid x > 2j\}\} \end{aligned}$$

Oczywiście, dla $i \neq j$, $Zbior_i \neq Zbior_j$ i $Klasa_i \neq Klasa_j$. Ponadto dla każdych i, j zachodzi $\cup elem_i^j = Zbior_i$, czyli $elem_i^j \in Klasa_i$.

b) Jest jasne, że każdej klasie abstrakcji odpowiada inny podzbiór C. Ponadto każdemu $B \subseteq C$ odpowiada jakaś klasa abstrakcji (dokładniej ta w której znajduje się $\{C\setminus B\}$). Aby więc policzyć liczbę klas abstrakcji wystarczy policzyć liczbę podzbiów C. Dla C o mocy 75 wynosi ona 2^{75}.