Zad. 1. Niech $A \div B$ oznacza $(A \backslash B) \cup (B \backslash A)$. Niech $\sim$ będzie relacją binarną w zbiorze $P(\mathbb{N})^{P(\mathbb{N})}$ określoną następująco: dla $f, g : P(\mathbb{N}) \to P(\mathbb{N})$, $f \sim g$ wtw. gdy zbiór

$$\{X \subseteq \mathbb{N} : f(X) \div g(X) \text{ jest nieskończony } \} \tag{1}$$

jest skończony.

a) Pokaż, że $\sim$ jest relacją równoważności.

b) Czy wszystkie klasy abstrakcji są nieskończone?

c) Czy dla każdych dwóch funkcji f i g z $P(\mathbb{N})$ w $P(\mathbb{N})$, jeśli $f \sim g$ i f jest na $P(\mathbb{N})$, to g też jest na $P(\mathbb{N})$?

Rozwiązanie: Podstawowa intuicja jest następująca: dwie funkcje f i g są w relacji, gdy różnią się „znacząco" ($f(X) \div g(X)$ jest nieskończony) w „niewielu" punktach X (tzn. w skończenie wielu).

a) Zwrotność: bo dla każdego $X \subseteq \mathbb{N}$, zachodzi $f(X) \div f(X) = \emptyset$. Symetryczność wynika bezpośrednio z faktu, że $f(X) \div g(X) = g(X) \div f(X)$, dla dowolnego X i dowolnych funkcji f i g. Pozostaje dowód przechodniości.

Dla dowlnych funkcji a, b z $P(\mathbb{N})$ w $P(\mathbb{N})$, niech Z_{ab} oznacza zbiór

$$\{X \subseteq \mathbb{N} : a(X) \div b(X) \text{ jest nieskończony } \}.$$

Czyli $a \sim b$ wtw. gdy Z_{ab} jest skończnony. Niech f, g, h będą funkcjami z $P(\mathbb{N})$ w $P(\mathbb{N})$ takimi, że $f \sim g$ i $g \sim h$. Dla pokazania $f \sim h$ wystarczy, jeśli udowodnimy

$$Z_{fh} \subseteq Z_{fg} \cup Z_{gh}, \tag{2}$$

ponieważ podzbiór sumy dwóch zbiorów skończonych jest zawsze skończony. Użyjemy następującego lematu:

Lemat: Dla dowolnych zbiorów A, B i C, zachodzi: $A \div C \subseteq A \div B \cup B \div C$.

Dowód lematu: Niech $x \in A \div C$. Bez utraty ogólności załóżmy, że $x \in A \backslash C$. Rozważmy teraz dwa przypadki. Albo $x \in B$, wtedy $x \in B \backslash C$. Albo $x \notin B$, ale wtedy $x \in A \backslash B$. Czyli w każdym przypadku $x \in A \backslash B \cup B \backslash C$, więc $x \in A \div B \cup B \div C$. **[Koniec dowodu lematu]**

Wróćmy do dowodu inkluzji (2). Niech $X \in Z_{fh}$, czyli $f(X) \div h(X)$ jest nieskończony. Na podstawie lematu mamy:

$$f(X) \div h(X) \subseteq f(X) \div g(X) \cup g(X) \div h(X).$$

Zatem jeden ze zbiorów $f(X) \div g(X)$, $g(X) \div h(X)$ musi być też nieskończony. Czyli X należy do jednego ze zbiorów Z_{fg}, Z_{gh}. To kończy dowód punktu (2) i zarazem dowód przechodniości.

b) Tak! Niech $f : P(\mathbb{N}) \to P(\mathbb{N})$ i niech $X \subseteq \mathbb{N}$, f i X dowolne. Jest nieskończenie wiele funkcji równoważnych funkcji f, które różnią się od f tylko w punkcie X (czyli zbiór (1) jest co najwyżej jednoelementowy). Formalnie, zdefiniujmy nieskończoną rodzinę funkcji $\{f_Y : P(\mathbb{N}) \to P(\mathbb{N})\}_{Y \subseteq \mathbb{N}}$, indeksowaną zbiorami $Y \subseteq \mathbb{N}$, następująco:

$$f_Y(X) = \begin{cases} f(Z), & \text{gdy } Z \neq X \\ Y, & \text{gdy } Z = X. \end{cases}$$

Oczywiście $f_Y \sim f$, dla każdego Y i funkcje f_Y są parami różne.

c) Nie! Intuicyjnie, wykorzystamy tutaj następującą możliwość: jeśli zmodyfikujemy watość funkcji f w każdym punkcie X nieznacznie, tzn. dodamy lub wyrzucimy tylko skończenie wiele elementów (np. 1), to otrzymana funkcja będzie wciąż równoważna funkcji f.

Formalnie, uzasadnimy odpowiedź negatywną podając kontrprzykład. Rozważmy np. identyczność, czyli $f : P(\mathbb{N}) \to P(\mathbb{N})$ t. że $f(X) = X$ (aczkolwiek konstrukcja poniżej działa również dla dowolnej innej funkcji f, która jest na). Zdefiniujmy funkcję $g : P(\mathbb{N}) \to P(\mathbb{N})$ następująco:

$$g(X) = \begin{cases} f(X) \backslash \{7\}, & \text{gdy } 7 \in f(X) \\ f(X), & \text{gdy } 7 \notin f(X). \end{cases}$$

Oczywiście funkcja f jest na $P(\mathbb{N})$. Ponadto $f \sim g$, ponieważ dla każdego $X \subseteq \mathbb{N}$, $f(X) \div g(X)$ zawiera co najwyżej jeden element, czyli zbiór (1) jest pusty. Natomiast g jest tak zdefiniowana, że $7 \notin g(X)$, dla każdego $X \subseteq \mathbb{N}$. Więc g nie jest na $P(\mathbb{N})$, bo np. $\{7\} \notin \vec{g}(P(\mathbb{N}))$.