Kolokwium (WTM), 27 listopada 2003

GRUPA B

Każde zadanie rozwiązujemy na osobnej kartce!
Każdą kartkę proszę podpisać oraz napisać grupę (A lub B) i nazwisko prowadzącego ćw.

Zad. 1. (7 pkt) Niech $A \div B$ oznacza $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Niech $\sim$ będzie relacją binarną w zbiorze $P(\mathbb{N})^{P(\mathbb{N})}$ określoną następująco: dla $f, g : P(\mathbb{N}) \to P(\mathbb{N})$, $f \sim g$ wtw. gdy zbiór

$$\{X \subseteq \mathbb{N} : f(X) \div g(X) \text{ jest nieskończony } \} \tag{1}$$

jest skończony.

a) Pokaż, że $\sim$ jest relacją równoważności.

b) Czy wszystkie klasy abstrakcji są nieskończone?

c) Czy dla każdych dwóch funkcji f i g z $P(\mathbb{N})$ w $P(\mathbb{N})$, jeśli $f \sim g$ i f jest na $P(\mathbb{N})$, to g też jest na $P(\mathbb{N})$?

Zad. 2. (7 pkt) Niech C będzie zbiorem. Zdefiniujmy funkcję $f : P(P(C)) \to P(C)$ oraz relację równoważności R w zbiorze $P(P(C))$ następującymi wzorami, dla $A, B \subseteq P(C)$:

$$f(A) = \bigcup \{C \setminus X : X \in A\} \qquad \langle A, B \rangle \in R \text{ wtw. gdy } f(A) = f(B).$$

a) Niech $C = \mathbb{N}$.

(i) Czy f jest różnowartościowa? Czy f jest na?

(ii) Ile elementów ma zbiór $\vec{f}^{-1}(\{\emptyset\})$?

(iii) Wskaż nieskończenie wiele nieskończonych klas abstrakcji relacji R.

b) Ile różnych klas abstrakcji ma relacja R, gdy $|C| = 75$?

Zad. 3. (6 pkt) Wskaż zbiór A, jego podzbiór $X \subseteq A$ oraz funkcję $f : A \to A$ takie, że

$$\vec{f^6}(X) = \vec{f^5}(X) \neq \vec{f^4}(X), \qquad \vec{f^4}^{-1}(X) \neq \vec{f^5}^{-1}(X) = \vec{f^6}^{-1}(X), \tag{2}$$

gdzie f^4, f^5 i f^6 oznaczają odpowiednio 4, 5 i 6-krotne złożenie funkcji f.

Zad. dodatkowe (6 pkt) Czy może dodatkowo zachodzić warunek

$$\vec{f^6}(X) = \vec{f^6}^{-1}(X)? \tag{3}$$