Kolokwium (WTM), 27 listopada 2003

GRUPA A

Każde zadanie rozwiązujemy na osobnej kartce!
Każdą kartkę proszę podpisać oraz napisać grupę (A lub B) i nazwisko prowadzącego ćw.

Zad. 1. (7 pkt) Niech $A \div B$ oznacza $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Niech $\sim$ będzie relacją binarną w zbiorze $P(\mathbb{N})^{P(\mathbb{N})}$ określoną następująco: dla $f, g : P(\mathbb{N}) \to P(\mathbb{N})$, $f \sim g$ wtw. gdy zbiór

$$\{X \subseteq \mathbb{N} : f(X) \div g(X) \text{ jest nieskończony } \} \tag{1}$$

jest skończony.

a) Pokaż, że $\sim$ jest relacją równoważności.

b) Czy wszystkie klasy abstrakcji są nieskończone?

c) Czy dla każdej funkcji $g : P(\mathbb{N}) \to P(\mathbb{N})$ takiej, że $g \sim I_{P(\mathbb{N})}$, i dla każdego nieskończonego $X \subseteq \mathbb{N}$, zbiór $g(X)$ jest nieskończony?

Zad. 2. (7 pkt) Niech C będzie zbiorem. Zdefiniujmy funkcję $f : P(P(C)) \to P(C)$ oraz relację równoważności R w zbiorze $P(P(C))$ następującymi wzorami, dla $A, B \subseteq P(C)$:

$$f(A) = \begin{cases} \bigcap\{C \setminus X : X \in A\}, & \text{gdy } A \neq \emptyset \\ C, & \text{gdy } A = \emptyset \end{cases} \qquad \langle A, B\rangle \in R \text{ wtw. gdy } f(A) = f(B).$$

a) Niech $C = \mathbb{N}$.

(i) Czy f jest różnowartościowa? Czy f jest na?

(ii) Ile elementów ma zbiór $\vec{f}^{-1}(\{C\})$?

(iii) Wskaż nieskończenie wiele nieskończonych klas abstrakcji relacji R.

b) Ile różnych klas abstrakcji ma relacja R, gdy $|C| = 75$?

Zad. 3. (6 pkt) Wskaż zbiór A, jego podzbiór $X \subseteq A$ oraz funkcję $f : A \to A$ takie, że

$$\overrightarrow{f^{12}}(X) = \overrightarrow{f^{6}}(X) \neq X \neq \overrightarrow{f^{6}}^{-1}(X) = \overrightarrow{f^{12}}^{-1}(X), \tag{2}$$

gdzie f^6 i f^{12} oznaczają odpowiednio 6-krotne i 12-krotne złożenie funkcji f.

Zad. dodatkowe (6 pkt) Czy może dodatkowo zachodzić warunek

$$\overrightarrow{f^{12}}(X) = \overrightarrow{f^{12}}^{-1}(X)? \tag{3}$$