Wstęp do teorii mnogości, egzamin poprawkowy, 28 lutego 2004

Każde zadanie rozwiązujemy na osobnej kartce!
Każdą kartkę proszę podpisać oraz napisać nazwisko prowadzącego ćw.

Zad. 1. (15 pkt.) Oblicz moc zbioru wszystkich antyłańcuchów w $\langle \{0,1\}^*, \sqsubseteq \rangle$. Symbol $\sqsubseteq$ oznacza relację porządku prefiksowego.

Zad. 2. (10 pkt.) Czy każdy skończony porządek zupełny posiadający element najwiekszy jest kratą zupełną?

Zad. 3. (10 pkt.) Niech $\mathbb{N}$ oznacza zbiór liczb naturalnych. Niech $Rel(A) = P(A \times A)$. Definiujemy funkcję $l : Rel(\mathbb{N}) \to Rel(P(\mathbb{N}))$ następująco:

$$l(R) = \{\langle X, Y\rangle : (\forall x \in X\ \exists y \in Y \text{ t.że } xRy) \text{ oraz } (\forall y \in Y\ \exists x \in X \text{ t.że } xRy)\}.$$

Które z poniższych zdań są prawdziwe dla każdej relacji $R \in Rel(\mathbb{N})$?

a) R jest relacja równoważności wtedy i tylko wtedy, gdy $l(R)$ jest relacją równoważności.

b) R jest dobrym porządkiem wtedy i tylko wtedy, gdy $l(R)$ jest dobrym porządkiem.

Zad. 4. (15 pkt.) Definiujemy funkcję $\phi : P(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ następująco:

$$\phi(A)(x) = \begin{cases} x & \text{gdy } x \in A \\ x+1 & \text{gdy } x \notin A. \end{cases}$$

a) czy ϕ jest na $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$?

Oblicz moc zbioru zawierającego wszystkie $A \subseteq \mathbb{N}$ takie, że:

b) funkcja $\phi(A)$ jest bijekcją.

c) funkcja $\phi(A)$ jest różnowartościowa.

Oblicz moc zbioru $\vec{\phi}^{-1}(X)$, gdy:

d) $X = \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \{n \in \mathbb{N} : \vec{f}^{-1}(\{n\}) \text{ jest jednoelementowy}\} \text{ jest skończony}\}$.

e) $X = \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} :$ zbiory $\{n \in \mathbb{N} : n = f(n)\}$ i $\{n \in \mathbb{N} : n \neq f(n)\}$ są równoliczne$\}$.