Wstęp do teorii mnogości, egzamin, 28 stycznia 2004

Każde zadanie rozwiązujemy na osobnej kartce!
Każdą kartkę proszę podpisać oraz napisać nazwisko prowadzącego ćw.

Zad. 1. (16 pkt.) Niech $A \neq \emptyset$ i niech T oznacza zbiór wszystkich drzew[1] nad A.

a) Czy $\langle T, \subseteq \rangle$ jest porządkiem zupełnym?

b) Czy $\langle T, \subseteq \rangle$ jest dobrze ufundowany?

c) Oblicz kres górny i dolny zbioru wszystkich drzew skończonych (jeśli kres istnieje).

Zad. 2. (12 pkt.) Niech $R \subseteq A \times B$ będzie relacją taką, że

$$RR^{-1}R = R.$$

Czy $R^{-1}R$ jest relacją równoważności w zbiorze $\{a \in A : \exists b \in B \text{ takie, że } \langle a, b\rangle \in R\}$? Czy istnieje najmniejsza relacja równoważności w A zawierająca $R^{-1}R$?

Zad. 3. (18 pkt.) Niech $\mathbb{N}$ oznacza zbiór liczb naturalnych. Definiujemy funkcję $\phi : P(\mathbb{N})^{P(\mathbb{N})} \to P(P(\mathbb{N}))$ następująco:

$$\phi(f) = \{X \in P(\mathbb{N}) : f(X) = X\}.$$

a) Czy ϕ jest różnowartościowa?

b) Czy ϕ jest na?

c) Oblicz moc zbioru $\vec{\phi}^{-1}(\{\{\{1\}\}\})$.

d) Niech M oznacza zbiór wszystkich funkcji monotonicznych z $P(\mathbb{N})$ w $P(\mathbb{N})$, czyli $M = \{f \in P(\mathbb{N})^{P(\mathbb{N})} : f(X) \subseteq f(Y) \text{ gdy } X \subseteq Y\}$. Czy $\langle \vec{\phi}(M), \subseteq \rangle$ jest kratą zupełną?

Zad. 4. (14 pkt.) Niech $\mathbb{Q}$ oznacza zbiór liczb wymiernych. Oblicz moc zbioru wszystkich relacji równoważności R w $\mathbb{Q}$ takich, że dla każdego $p \in \mathbb{Q}$, zbiór

$$\{q \in \mathbb{Q} : \langle p, q\rangle \in R\}$$

zawiera: **a)** mniej niż 2 elementy, **b)** dokładnie 2 elementy, **c)** więcej niż 2 elementy.

[1] Dla przypomnienia: *drzewo nad A* to dowolny podzbiór T zbioru A^* spełniający dwa warunki: (i) słowo puste $\varepsilon \in T$, (ii) jeśli $w \in T$ i v jest prefiksem w, to $v \in T$ również.