3 Prawa równościowe

Zanim formalnie zdefiniujemy pojęcie semantycznej równości procesów, co nastąpi w następnym rozdziale, teraz rozważymy pewne równości zachodzące pomiędzy procesami. Równości te odnoszą się do semantycznej równości procesów = wspomnianej w poprzednim rozdziale. Możemy zatem sobie wyobrazić *algebrę procesów*. Jej elementami są procesy (wyrażenia procesowe bez zmiennych) modulo równość semantyczna. Tak więc, semantycznie, proces to nie jest wyrażenie, ale cała klasa abstrakcji równoważnych wyrażeń. Operacjami w algebrze procesów są znane nam już operacje do budowania procesów: prefiks, suma (wybór), przemianowanie, zakaz oraz złożenie równoległe. Aby to wszystko miało sens, równość semantyczna musi być kongruencją względem operacji w języku (podstawowym), tzn. musi ona być zachowana przez te operacje. Dowiedziemy tego w którymś z następnych rozdziałów. Dzięki temu, można w dowolnym wyrażeniu podmienić proces na inny, o ile jest on równoważny. Dodatkowo, pewne równania mają jednoznaczne rozwiązanie w algebrze procesów (patrz rozdział 3.2).

Wyróżnimy 3 grupy równości:

- *równości statyczne*, dotyczące operatorów statycznych, do których zaliczymy $\_|\_$, $\_\backslash L$ oraz $\_[f]$;
- *równości dynamiczne*, dotyczące operatorów dynamicznych: $\_ + \_$, $\alpha.\_$ oraz rekurencji;
- *prawo ekspansji*, łączące dwie grupy operatorów.

Operatory statyczne to te konstrukcje językowe, które nie znikają podczas tranzycji. Determinują one zatem statyczną strukturę systemu. Ogólnie, posiadają one tylko reguły następującej postaci:

$$\frac{E_{i_1} \xrightarrow{\alpha_1} E'_{i_1} \quad \dots \quad E_{i_m} \xrightarrow{\alpha_m} E'_{i_m}}{op(E_1, \dots, E_n) \xrightarrow{\alpha} op(E'_1, \dots, E'_n)}$$

gdzie

- $\{i_1, \dots, i_m\} \subseteq \{1, \dots, n\}$;
- $i_j \neq i_k$, gdy $j \neq k$;
- $E'_i \equiv E_i$, gdy $i \notin \{i_1, \dots, i_m\}$.

3.1 Równości dynamiczne

Procesy wraz z operatorem binarnego wyboru stanowią idempotentny monoid przemienny, którego elementem neutralnym jest 0:

$$\begin{array}{llcl}
(+1) & P+Q & = & Q+P \\
(+2) & P+(Q+R) & = & (P+Q)+R \\
(+3) & P+P & = & P \\
(+4) & P+0 & = & P
\end{array}$$

Dla uzasadnienia wystarczy przypomnieć sobie zgrubne przybliżenie równości semantycznej opisane na końcu rozdziału 2.2. Ponieważ $P + Q \xrightarrow{\alpha} P'$ wtw. gdy $Q + P \xrightarrow{\alpha} P'$, więc $P + Q = Q + P$. Podobnie pozostałe równości.

Ćwiczenie 23 *Zaproponuj uogólnienie praw* (+1) – (+4) *dla sum nieskończonych.*

Drugą grupę równości stanowią prawa dotyczące τ:

$$\begin{array}{llcl}
(\tau_1) & \alpha.\tau.P & = & \alpha.P \\
(\tau_2) & P+\tau.P & = & \tau.P \\
(\tau_3) & \alpha.(P+\tau.Q)+\alpha.Q & = & \alpha.(P+\tau.Q)
\end{array}$$

Uzasadnienie dla (τ_2) i (τ_3) jest podobne jak poprzednio, z tą różnicą, iż musimy wziąć pod uwagę nieobserwowalność zdarzenia τ. Zatem, zamiast relacji $\xrightarrow{\alpha}$ rozważmy relację $\stackrel{\alpha}{\Longrightarrow}$ określoną następująco:

$$\stackrel{\alpha}{\Longrightarrow} \; = \; (\xrightarrow{\tau})^* \circ \xrightarrow{\alpha} \circ (\xrightarrow{\tau})^*, \tag{9}$$

przy czym $(\xrightarrow{\tau})^*$ oznacza zwrotno-tranzytywne domknięcie relacji $\xrightarrow{\tau}$. Czyli zdarzenie α może być poprzedzone przez dowolną liczbę zdarzeń τ (być może 0) a także dowolna liczba τ może nastąpic po α. Tranzycje $P \stackrel{\alpha}{\Longrightarrow} Q$ będziemy nazywać *słabymi tranzycjami* a proces Q *słabym bezpośrednim potomkiem* procesu P.

Wracając do uzasadnienia (τ_2), mamy $P + \tau.P \stackrel{\alpha}{\Longrightarrow} Q$ wtw gdy $\tau.P \stackrel{\alpha}{\Longrightarrow} Q$. Równość (τ_3) można uzasadnić podobnie.

Oto kilka nierówności, które nie będą zachodzić w ogólności:

$$\tau.P \neq P,$$

czyli τ nie zawsze może być wymazane. W naszej algebrze procesów nie ma również rozdzielności prefiksu względem sumy:

$$\alpha.(P+Q) \neq \alpha.P + \alpha.Q$$

Ćwiczenie 24 *Pokaż*

$$\begin{aligned} P + \tau.(P+Q) &= \tau.(P+Q) \\ \alpha.(P + \tau.\tau.P) &= \alpha.P, \end{aligned}$$

korzystając z (τ_1) - (τ_3).

Ćwiczenie 25 *Pokaż* $\tau.(P + \alpha.(Q + \tau.R)) = \tau.(P + \alpha.(Q + \tau.R)) + \alpha.R$.

Ćwiczenie 26 *Ogólniej niż w ćwiczeniu 25: pokaż że jeśli* $P \stackrel{\alpha}{\Longrightarrow} P'$, *to* $P = P + \alpha.P'$, *dla dowolnego procesu* P *zbudowanego wyłącznie z operatorów dynamicznych.*

3.2 Jednoznaczność rozwiązań układów równań

Rozważmy stałą procesową zdefiniowaną przez

$$\mathrm{A} \stackrel{\mathrm{def}}{=} E\{\mathrm{A}/X\};$$

po prawej stronie mamy wyrażenie procesowe E, w którym za wszystkie wystąpienia zmiennej X podstawiono A. Pomyślmy o A jako o rozwiązaniu równania:

$$X = E \tag{10}$$

Byłoby idealnie, gdyby równanie to miało dokładnie jedno rozwiązanie, właśnie A. Oczywiście, dokładnie jedno *modulo równość semantyczna* $=$. Czyli chcielibyśmy żeby zachodziło:

- $\mathrm{A} = E\{\mathrm{A}/X\}$ (proces A jest rozwiązaniem równania (10)); oraz
- Jeśli $P = E\{P/X\}$ oraz $Q = E\{Q/X\}$, to $P = Q$ (proces A jest *jedynym* rozwiązaniem).

Po co nam jednoznaczność? Przypomnijmy sobie równość (7) z rozdziału 2.1:

$$(\mathrm{A}|\mathrm{B})\backslash c = a.\mathrm{D},$$

gdzie stała D określona jest następująco:

$$\mathrm{D} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \overline{b}.a.\mathrm{D} + a.\overline{b}.\mathrm{D}.$$

Mamy prawo wywnioskować równość (7) ponieważ (A|B)$\backslash c$ = a.(A'|B)$\backslash c$ oraz proces (A'|B)$\backslash c$ jest rozwiązaniem równania

$$X \;=\; \overline{b}.a.X + a.\overline{b}.X. \tag{11}$$

I tutaj potrzebna jest jednoznaczność, aby wywnioskować D = (A'|B)$\backslash c$!

Definicja 3 *Zmienna X jest* <u>*sekwencyjna*</u> *w wyrażeniu E jeśli X występuje w E tylko w podwyrażeniach zbudowanych włącznie z prefiksu i sumy. Zmienna X jest* <u>*strzeżona*</u> *w wyrażeniu E jeśli każde wystąpienie X w E jest wewnątrz pewnego podwyrażenia $l.E'$ w E.*

Przykład 4 *Aby wyjaśnić niejasności, popatrzmy na kilka wyrażeń:*

- *X jest strzeżona ale nie sekwencyjna w $a.X|b.0$,*
- *X jest sekwencyjna ale nie strzeżona w $\tau.X + b.0|c.Y$ oraz w $X + c.Y$,*
- *Y jest i sekwencyjna i strzeżona w $X + c.Y$.*

Poniższe twierdzenie udowodnimy później:

Twierdzenie 5 (jednoznaczność rozwiązań)

- *Jeśli $A \overset{def}{=} E\{A/X\}$ to $A = E\{A/X\}$.*
- *Rozważmy układ równań $A_i \overset{def}{=} E_i\{\widetilde{A}/\widetilde{X}\}$, indeksowany przez $i \in I$. Przez $E_i\{\widetilde{A}/\widetilde{X}\}$ rozumiemy wyrażenie procesowe E_i, w którym za wszystkie wystąpienia zmiennej X_j podstawiono A_j, dla wszystkich $j \in I$. Zakładamy iż zmienne pojawiające się w wyrażeniach E_i należą do zbioru $\{X_j : j \in I\}$ oraz że zmienna X_i jest sekwencyjna i strzeżona w E_j, dla każdego $i, j \in I$. Niech $\widetilde{P}$ i $\widetilde{Q}$ będą dwiema rodzinami procesów indeksowanych przez $i \in I$. Jeśli $\widetilde{P} = \widetilde{E}\{\widetilde{P}/\widetilde{X}\}$ (przez co rozumiemy: $P_i = E_i\{\widetilde{P}/\widetilde{X}\}$, dla wszystkich i) oraz $\widetilde{Q} = \widetilde{E}\{\widetilde{Q}/\widetilde{X}\}$, to $\widetilde{P} = \widetilde{Q}$ (tzn. $P_i = Q_i$, dla wszystkich i).*

W drugiej części twierdzenia zakładamy, iż wszystkie zmienne są strzeżone i sekwencyjne. Łatwo się zatem domyślić, iż nie zawsze mamy jednoznaczność. Oto kilka przykładów:

Ćwiczenie 27 *Wskaż nieskończone zbiory rozwiązań następujących dwóch równań:*

$$\begin{aligned} X &= \tau.X \\ Y &= (a.Y|\overline{a}.0)\backslash a \end{aligned}$$

Ćwiczenie 28 *Pokaż, że dla każdego P, proces $\tau.(a.0 + \tau.P)$ jest rozwiązaniem równania $X = a.0 + \tau.X$.*

Ćwiczenie 29 *Znajdź nieskończony zbiór rozwiązań układu równań:*

$$\begin{aligned} X &= a.0 + \tau.Y \\ Y &= b.0 + \tau.X \end{aligned}$$

Jak wspomnieliśmy, twierdzenie 5 jest przydatne w rachunkach:

Ćwiczenie 30 *Zakładając $P = a.b.P$ oraz $Q = b.a.Q$, wykaż $P = a.Q \quad i \quad Q = b.P$.*

W rzeczywistości wymaganie, aby wszystkie zmienne były strzeżone i sekwencyjne jest zbyt mocne i można je osłabić. Oto kilka przykładów:

Ćwiczenie 31 *Rozważ układ równań, w którym zmienna X nie jest strzeżona:*

$$\begin{aligned} X &= a.X + \tau.Y \\ Y &= a.X + b.Y \end{aligned}$$

i wykaż, iż jego jedyne rozwiązanie jest następujące: $X = \tau.A, Y = A$, gdzie $A \stackrel{def}{=} a.A + a.A$.

Ćwiczenie 32 *Znajdź układ równań taki, że przynajmniej jedna ze zmiennych nie jest sekwencyjna w przynajmniej jednym równaniu, a pomimo tego ma on dokładnie jedno rozwiązanie.*

3.3 Prawo ekspansji

W praktyce często opis systemu współbieżnego ma następującą postać:

$$(P_1[f_1]|\ldots|P_n[f_n])\backslash L,$$

$n \geq 1$.[2] Poniższe twierdzenie opisuje wszystkie tranzycje procesu w takiej postaci:

Twierdzenie 6

$$\begin{aligned} &(P_1[f_1]|\ldots|P_n[f_n])\backslash L \quad = \\ &\sum\{\ f_i(\alpha).(P_1[f_1]|\ldots|P_i'[f_i]|\ldots|P_n[f_n])\backslash L \ :\ P_i \xrightarrow{\alpha} P_i', f_i(\alpha) \notin L \cup \overline{L}\ \} \ + \\ &\sum\{\ \tau.(P_1[f_1]|\ldots|P_i'[f_i]|\ldots|P_j'[f_j]|\ldots|P_n[f_n])\backslash L \ :\ P_i \xrightarrow{l_1} P_i', P_j \xrightarrow{l_2} P_j', f_i(l_1) = \overline{f_j(l_2)}, i < j\ \} \end{aligned}$$

[2] Dodatkowo, czasem procesy P_i będą *sekwencyjne*, tzn. zbudowane tylko z operatorów dynamicznych.

Twierdzenie 6 jest sformułowane możliwie najogólniej, stąd może ono być niezbyt czytelne. Tym niemniej, jego dowód jest bardzo prosty – wystarczy skorzystać z przybliżenia równości semantycznej opisanego na końcu rozdziału 2.2.

Ćwiczenie 33 *Sformułuj Twierdzenie 6 w przypadku, gdy wszystkie funkcje przemianowujące f_j są identycznościami, a zatem można je pominąć.*

Ćwiczenie 34 *Pokaż że proces $(A'|B)\backslash c$ z rozdziału 3.2 jest faktycznie rozwiązaniem równania (11).*

Oto ważne i ciekawe wnioski z Twierdzenia 6 dla $n = 1$:

Wniosek 7

$$(\alpha.P)\backslash L = \begin{cases} 0, & \textit{gdy} \quad \alpha \in L \cup \overline{L} \\ \alpha.P\backslash L, & \textit{w.p.p.} \end{cases} \tag{12}$$

$$(\alpha.P)[f] = f(\alpha).P[f] \tag{13}$$

$$(P + Q)\backslash L = P\backslash L + Q\backslash L \tag{14}$$

$$(P + Q)[f] = P[f] + Q[f] \tag{15}$$

Ćwiczenie 35 *Przypomnij sobie specyfikację i implementację bufora z rozdziału 1. Korzystając z Twierdzenia 5 oraz z Wniosku 7(13), wykaż $C \frown C = \mathit{Buff}_2(\epsilon)$, przy czym:*

$$\begin{aligned}
C &\stackrel{def}{=} in.C' \\
C' &\stackrel{def}{=} \overline{out}.C \\
P \frown Q &\stackrel{def}{=} (P[c/out]|Q[c/in])\backslash c \\
\mathit{Buff}_2(0) &\stackrel{def}{=} in.\mathit{Buff}_2(1) \\
\mathit{Buff}_2(2) &\stackrel{def}{=} \overline{out}.\mathit{Buff}_2(1) \\
\mathit{Buff}_2(1) &\stackrel{def}{=} in.\mathit{Buff}_2(2) + \overline{out}.\mathit{Buff}_2(0)
\end{aligned}$$

$P[c/out]$ oznacza przemianowanie procesu P zmieniające tylko jedną nazwę, out. Tzn. $out \mapsto c, \overline{out} \mapsto \overline{c}$.

Ćwiczenie 36 *Ostatnie dwie równości wniosku 7 to prawa rozdzielności dwóch operatorów statycznych względem sumy. Czy rozdzielność taka zachodzi również dla _|_, tzn. czy prawdą jest*

$$(P + Q)|R \;=\; P|R + Q|R\ ?$$

3.4 Rodzaj syntaktyczny

Zanim przejdziemy do praw statycznych, musimy wprowadzić jedno proste pojęcie.

Definicja 8 *Mówimy, że zbiór $L \subseteq \mathcal{L}$ jest rodzajem procesu P, co oznaczamy przez $P : L$, o ile wszystkie zdarzenia procesu P oraz jego potomków należą do zbioru $L \cup \{\tau\}$.*

Zauważmy iż rodzaj procesu nie jest wyznaczony jednoznacznie natomiast istnieje zawsze rodzaj najmniejszy. Rodzaj procesu będzie nam potrzebny dla *warunkowego* sformułowania pewnych praw, np.

$$(P|Q)\backslash a \;=\; (P\backslash a)|Q, \qquad \text{o ile} \;\; a, \overline{a} \notin L, \quad Q : L.$$

Chcielibyśmy umieć efektywnie wyliczyć rodzaj procesu. Poniżej definiujemy *rodzaj syntaktyczny*, ozn. $\mathcal{L}(P)$.

Załóżmy przez chwilę, iż $\mathcal{L}(\mathrm{A})$ jest dane, dla każdej stałej A. Rozważmy następujący oczywisty przepis na wyliczenie rodzaju syntaktycznego:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{L}(l.P) & = & \{l\} \cup \mathcal{L}(P) \\ \mathcal{L}(\tau.P) & = & \mathcal{L}(P) \\ \mathcal{L}(\sum_{i \in \mathrm{I}} P_i) & = & \bigcup_{i \in \mathrm{I}} \mathcal{L}(P_i) \\ \mathcal{L}(P|Q) & = & \mathcal{L}(P) \cup \mathcal{L}(Q) \\ \mathcal{L}(P\backslash L) & = & \mathcal{L}(P) \setminus (L \cup \overline{L}) \\ \mathcal{L}(P[f]) & = & f(\mathcal{L}(P)) \end{array} \tag{16}$$

Przyporządkowanie rodzajów $\mathcal{L}(\mathrm{A})$ stałym A nazwiemy *poprawnym*, o ile $\mathcal{L}(P) \subseteq \mathcal{L}(\mathrm{A})$, gdy $\mathrm{A} \stackrel{\text{def}}{=} P$.

Ćwiczenie 37 *Pokaż że istnieje najmniejsze poprawne przyporządkowanie rodzajów stałym procesowym, tzn. takie, które każdej stałej przyporządkowuje możliwie najmniejszy zbiór etykiet. (Wskazówka: użyj twierdzenia Knastera-Tarskiego o najmniejszym punkcie stałym w kracie zupełnej.)*

Definicja 9 *Przez rodzaj syntaktyczny procesu P, ozn. $\mathcal{L}(P)$, rozumiemy zbiór otrzymany za pomocą reguł (16), dla najmniejszego poprawnego przyporządkowania rodzajów stałym procesowym.*

Ćwiczenie 38 *Pokaż, za pomocą przykładu, że rodzaj syntaktyczny nie jest w ogólności najmniejszym rodzajem procesu.*

Fakt 10 $P : \mathcal{L}(P)$.

Fakt ten można łatwo dowieść na używając poniższego lematu:

Lemat 11 *Niech* $P \xrightarrow{\alpha} P'$. *Wtedy*

- $\alpha \in \mathcal{L}(P) \cup \{\tau\}$,
- $\mathcal{L}(P') \subseteq \mathcal{L}(P)$.

Ćwiczenie 39 *Dowiedż lematu przez indukcje po rozmiarze drzewa wywodu. Następnie udowodnij fakt.*

3.5 Równości statyczne

Równości statyczne to (z grubsza) dokładnie te równości pomiędzy procesami które zachodzą gdy interpretujemy proces jako *graf statyczny*. Tzn. są to równości zachodzące w algebrze grafów statycznych, którą opisujemy poniżej. Poniższa definicja uściśla pojęcie znane nam już z przykładów w rozdziale 1.

Definicja 12 *Graf statyczny to graf skończony o następujących właściwościach:*

- *Każdy wierzchołek jest etykietowany procesem.*
- *Każdy wierzchołek, z etykietą powiedzmy* P*, dla każdej* $l \in \mathcal{L}(P)$*, posiada port o etykiecie wewnętrznej* l.
- *Każda krawędź grafu łączy dwa porty w różnych wierzchołkach.*
- *Każdy port może posiadać etykietę zewnętrzną; jeśli ją ma, może ona być rożna od jego etykiety wewnętrznej.*
- *Porty połączone krawędzią albo nie posiadają etykiet zewnętrznych albo ich etykiety zewnętrzne są komplementarne.*
- *Wszystkie pary portów o komplementarnych etykietach zewnętrznych są połączone.*

Algebra którą teraz definiujemy zawiera wszystkie grafy statyczne spełniające powyższą definicję. Posiada ona operacje odpowiadające trzem operatorom statycznym, których działanie jest następujące:

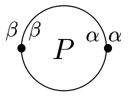
- Graf $G_1|G_2$ tworzymy z grafów G_1 i G_2 przez połączenie krawędzią wszystkich par portów o komplementarnych etykietach zewnętrznych, jeden z G_1 a drugi z G_2.

- Graf $G\backslash L$ tworzymy wymazując w G wszystkie etykiety zewnętrzne ze zbioru $L \cup \overline{L}$.

- Graf $G[f]$ tworzymy zastępując w G każdą etykietę zewnętrzną l przez $f(l)$; następnie łączymy krawędzią wszystkie pary portów o komplementarnych etykietach zewnętrznych.

Uwaga dla Czytelnika myślącego bardzo formalnie: w rzeczywistości w algebrze grafów statycznych mamy jedną operację dwuargumentową oraz dwie rodziny operacji jednoargumentowych: $\_\backslash L$ dla każdego $L \subseteq \mathcal{L}$ oraz $\_[f]$ dla każdej funkcji przemianowującej f. Ta sama uwaga jest prawdziwa dla algebry procesów którą rozważamy w tym rozdziale, z tym, że mamy w niej więcej operacji: jednoargumentową $\alpha.\_$ dla każdego $\alpha \in \mathrm{Act}$ oraz rodzinę operacji o różnych krotnościach, $\sum_{i \in \mathrm{I}} \_{i}$, w zależności od mocy zbioru I.

Dla każdego procesu P, w algebrze grafów statycznych mamy następujący graf jednowierzchołkowy:



posiadający port dla każdej etykiety $\alpha, \beta, \ldots \in \mathcal{L}(P)$. (Jeśli Czytelnik usiłuje wciąż myśleć bardzo formalnie, to wszystkie takie grafy należy uważać za stałe w algebrze grafów statycznych. :)

Ćwiczenie 40 *Etykiety wewnętrzne pozostają niezmienione podczas budowania większych grafów z mniejszych. Czy są one niezbędne? Co by się zmieniło, gdyby ich nie było?*

Przedstawimy teraz trzy grupy równości, dotyczących każdego z operatorów statycznych. Wszystkie one są prawdziwe zarówno w algebrze grafów jak i w algebrze procesów. Ponadto, jeśli ograniczyć się do różnowartościowych funkcji przemianowujących (czego nie chcemy oczywiście robić), prawa te pozwalają wywieść *wszystkie* równości prawdziwe w algebrze grafów, stanowią zatem jej pełną aksjomatyzację. Oczywiście, w algebrze procesów prawdziwych jest znacznie więcej równości niż w algebrze grafów: w tej ostatniej możemy wnioskować tylko o *statycznych* własnościach procesów.

Ćwiczenie 41 *Podaj prosty przykład uzasadniający ostatnie zdanie.*

Po pierwsze, przemienność i łączność złożenia równoległego oraz neutralność procesu 0, interpretowanego jako graf pusty:

$$
\begin{array}{lrcl}
(|1) & P|Q & = & Q|P \\
(|2) & P|(Q|R) & = & (P|Q)|R \\
(|3) & P|0 & = & P
\end{array}
$$

Po drugie, cztery prawa dla operatora zakazu:

$$
\begin{array}{lrcll}
(\backslash 1) & P\backslash L & = & P & \text{o ile } \mathcal{L}(P) \cap (L \cup \overline{L}) = \emptyset \\
(\backslash 2) & P\backslash K\backslash L & = & P\backslash(K \cup L) & \\
(\backslash 3) & P[f]\backslash L & = & P\backslash f^{-1}(L)[f] & \\
(\backslash 4) & (P|Q)\backslash L & = & P\backslash L|Q\backslash L & \text{o ile } \mathcal{L}(P) \cap \overline{\mathcal{L}(Q)} \cap (L \cup \overline{L}) = \emptyset
\end{array}
$$

Po trzecie, cztery prawa dla przemianowania:

$$
\begin{array}{lrcll}
([]1) & P[\mathrm{id}] & = & P & \\
([]2) & P[f] & = & P[f'] & \text{o ile } f \text{ i } f' \text{ są identyczne na } \mathcal{L}(P) \\
([]3) & P[f][f'] & = & P[f' \circ f] & \\
([]4) & (P|Q)[f] & = & P[f]|Q[f] & \text{o ile } f \text{ jest różnowartościowe na} \\
 & & & & \mathcal{L}(P|Q) \cup \overline{\mathcal{L}(P|Q)}
\end{array}
$$

Prawa $(\backslash 4)$ oraz $([]4)$ są to *warunkowe* prawa rozłączności dwóch operatorów statycznych względem trzeciego, czyli złożenia równoległego. Oto kilka prostych wniosków:

Wniosek 13

$$
\begin{array}{rcll}
P[b/a] & = & P & \textit{o ile } \ a, \overline{a} \notin \mathcal{L}(P) \qquad (17) \\
P\backslash a & = & P[b/a]\backslash b & \textit{o ile } \ b, \overline{b} \notin \mathcal{L}(P) \qquad (18) \\
P\backslash a[b/c] & = & P[b/c]\backslash a & \textit{o ile } \ ? \qquad (19)
\end{array}
$$

Ćwiczenie 42 *Uzupełnij warunek w (19).*

Warto zwrócić tutaj uwagę, iż (18) przypomina nieco α-konwersję w rachunku λ ($\lambda a.P = \lambda b.P\{b/a\}$).

Ćwiczenie 43 *Dowiedź wniosku 13, korzystając z* $(\backslash 1)$ - $(\backslash 3)$ *oraz* $([]1)$ - $([]3)$.

Ćwiczenie 44 *Dowiedź wniosku 7.*

Ćwiczenie 45 *Pokaż, iż operator* $\_\frown\_$ *zdefiniowany w ćwiczeniu 35 jest łączny.*

Ćwiczenie 46 *Czy równości podane w tym rozdziale pozostają prawdziwe, gdy zamiast rodzaju syntaktycznego użyjemu najmniejszego rodzaju? Rozważ prawdziwość tych równości w algebrze grafów oraz w algebrze procesów.*